

УДК 519.85:004.94:61

DOI: [https://doi.org/10.30837/bi.2026.1\(104\).16](https://doi.org/10.30837/bi.2026.1(104).16)К. О. Веретельник<sup>1</sup><sup>1</sup>ХНЕУ ім. С. Кузнеця, м. Харків, Україна, kostiantyn.veretelnik@hneu.net,  
ORCID iD: 0009-0006-1114-8846

## ПОСЛІДОВНИЙ МУЛЬТІСТАРТОВИЙ АЛГОРИТМ РОЗМІЩЕННЯ БАГАТОВИМІРНИХ КУЛЬ

У роботі розглядається задача розміщення конгруентних багатовимірних куль у евклідовому просторі в кулі мінімального радіуса, яка належать до класу NP-складних. Запропоновано швидкий послідовний мультістартовий алгоритм розміщення куль, який ґрунтується на поетапному додаванні елементів до конфігурації з локальним уточненням положення кожної нової кулі. На кожному кроці для чергової кулі генерується початкове допустиме положення, після чого здійснюється спрямований пошук у напрямку до початку координат. За допомогою дихотомії локалізації визначається перший контакт із уже розміщеними кулями, що дає змогу сформувати обмежену множину активних геометричних обмежень. Подальше уточнення положення нової кулі виконується в локальному околі точки контакту. На заключному етапі оптимізаційного процесу для зменшення залежності результату від вибору стартової точки використовується мультістартова стратегія для останніх куль, після чого обирається найліпше з отриманих локально допустимих розміщень. Це дає змогу зменшити накопичення локальних геометричних дефектів без виконання повної глобальної оптимізації. Запропонований алгоритм характеризується низькою обчислювальною складністю, добре масштабується з ростом розмірності простору та зберігає можливість розпаралелювання обчислень. Результати числових експериментів для розмірностей аж до  $d=64$  підтверджують ефективність методу та поліпшення якості отриманих конфігурацій порівняно з одностартовими послідовними підходами.

БАГАТОВИМІРНА КУЛЯ, NP-СКЛАДНА ЗАДАЧА, МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, ПОСЛІДОВНА ОПТИМІЗАЦІЯ, МУЛЬТІСТАРТОВИЙ АЛГОРИТМ

**K. O. Veretelnik. Sequential multistart algorithm for placing multidimensional spheres.** The paper addresses the problem of packing congruent multidimensional spheres into a Euclidean sphere of minimal radius, a problem in NP-hard. A fast sequential multi-start packing algorithm is proposed, based on the incremental addition of elements to the configuration, followed by local refinement of each new sphere's position. At each step, an initial feasible position for the current sphere is generated, followed by a directed search toward the origin. Bisection localisation is employed to identify the first contact with previously placed spheres, enabling the formation of a restricted set of active geometric constraints. Further refinement of the sphere's position is conducted within the local neighbourhood of the contact point. To reduce the impact of the starting point selection on the final result, a multi-start strategy is applied during the final stages of the packing process, after which the best locally feasible configuration is selected. This approach minimises the accumulation of local geometric defects without necessitating full global optimisation. The proposed algorithm is characterised by low computational complexity, scales effectively with increasing space dimensionality, and maintains the potential for parallelisation. Numerical experiments for dimensions up to  $d=64$  confirm the efficiency of the method and demonstrate improved configuration quality compared to single-start sequential approaches

MULTIDIMENSIONAL BALL, NP-HARD PROBLEM, MATHEMATICAL MODELING, SEQUENTIAL OPTIMIZATION, MULTISTART ALGORITHM

### Вступ

Багатовимірні геометричні моделі відіграють важливу роль у сучасних підходах до опрацювання та передавання інформації. У теорії зв'язку точки високої розмірності асоціюються із сигналами, а їх околиці можна розглядати як області коректного прийому в шумових каналах. Форма та взаємне розташування цих областей визначають мінімальні відстані між кодовими словами, енергетичну ефективність системи та середню ймовірність помилки. Зокрема, у гаусових каналах кожне сигнальне слово природно співвідноситься з кулею у  $d$ -вимірному просторі, а проблема побудови сигнальної конфігурації трансформується у задачу розміщення багатовимірних куль без їх взаємного перетину [1]. Тому задачі геометричного проектування, зокрема задачі пакування, виступають фундаментальним інструментом для розроблення ефективних методів кодування та оптимізації сигнальних конфігурацій [2].

У високих розмірностях геометричні властивості простору змінюються кардинально: об'єми різко концентруються біля границь, взаємні відстані між точками стають майже однаковими, а оптимальні структури демонструють складні симетрії, які важко відтворити конструкторськими методами. Через це навіть базові задачі, такі як розміщення множини конгруентних куль стають обчислювально надзвичайно складними. Загальна постановка задачі пакування належить до класу NP-складних, що унеможливує використання глобальних методів оптимізації у просторах розмірності, характерних для прикладних задач зв'язку та інформаційної безпеки [1].

У багатьох практичних задачах метою є не побудова глобально оптимального пакування, а отримання допустимої високовимірної конфігурації, яка задовольняє геометричні обмеження й водночас може бути створена швидкими обчислювальними методами [3]. Такі конструктивні схеми особливо актуальні годі,

коли розміщення відбувається у контейнері обмеженого радіуса, а кількість об'єктів є великою. За таких умов методи глобальної оптимізації стають практично невикористовуваними, а тому ключову роль відіграють ефективні послідовні алгоритми, здатні будувати конфігурацію крок за кроком, опираючись лише на локальну інформацію про взаємодію нової кулі з уже розміщеними. Вони відомі як алгоритми RSA (випадкового послідовного додавання) або онлайн-алгоритми [4,5].

У теорії кодування та модулювання значна увага приділяється пошуку оптимальних решіткових структур у багатовимірних просторах, оскільки решітки забезпечують найліпші відомі асимптотичні властивості для багатьох задач, зокрема, мінімізацію середнього квадрату відхилення, максимізацію мінімальної відстані та побудову ефективних сигнальних сузір'їв. У низці вимірностей такі структури відомі: наприклад, решітки D4, E8 або решітка Ліча забезпечують оптимальні сферичні пакування і часто розглядаються як еталонні моделі для високовимірного модулювання [6]. Проте, у практичних сигнальних просторах завжди присутні додаткові обмеження, які роблять використання класичних решіток у чистому вигляді неможливим або неефективним. Зокрема, амплітудні обмеження передавача приводять до того, що решітка фактично руйнується біля межі контейнера, а велика частина її структури (особливо точки з великими нормами) не може бути використана без порушення вимог до потужності сигналу або через обмежені характеристики підсилювача. У багатовимірному модулюванні саме ця проблема чітко простежується у роботах з геометричного шейпінгу, де автори наголошують, що реалізовані сузір'я мусять задовольняти обмеження на максимальну амплітуду, і тому класичні решіткові пакування потребують модифікації, урізання або повного переформулювання задачі розміщення точок [7, 8].

Через ці практичні обмеження сучасні системи модулювання нерідко відходять від строгих решіткових структур на користь гібридних, нерешіткових або оптимізованих методом локального пошуку конфігурацій, які ліпше узгоджуються з амплітудними, енергетичними й технологічними обмеженнями реальних каналів зв'язку [9]. Фактично це знову приводить до задачі розміщення куль у скінченному контейнері, де необхідно знайти якомога щільніше або енергетично вигідніше розташування центрів.

Класичні послідовні методи, попри низькі обчислювальні витрати, мають суттєвий недолік: якість результуючої конфігурації сильно залежить від початкових положень [4, 10]. Це зумовлює потребу у методах, здатних комбінувати простоту послідовних схем із гнучкішими механізмами локальної адаптації.

У цій роботі пропонується підхід, спрямований

саме на розв'язання цієї проблеми. Ми розробляємо послідовний мультістартовий алгоритм, у якому кожна нова куля не лише додається до конфігурації, а й проходить процес локалізованого уточнення свого положення. Такий підхід поєднує масштабованість простих конструктивних методів із поліпшеною стійкістю до вибору стартової точки, що є критично важливим для задач моделювання багатовимірних сигнальних конфігурацій.

## 1. Постановка задачі та математична модель

Розглядається задача розміщення множини конгруентних гіперкуль у  $d$ -вимірному евклідовому просторі. Нехай задано  $N$  куль радіуса  $r > 0$ , центри яких позначимо через  $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$ .

Усі кулі мають бути розташовані всередині більшої кулі мінімального можливого радіуса  $R$  з центром у початку координат. Будь-яка точка кожної розміщеної кулі не повинна виходити за межі області  $S(R) = \{x \in \mathbb{R}^d : x \leq R\}$ .

Тобто має виконуватися умова:

$$\|x_i\| + r \leq R, i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

Крім того, кулі не повинні накладатися. Це означає, що відстань між центрами будь-яких двох куль має бути не меншою за  $2r$ :

$$\|x_i - x_j\| \geq 2r, i, j = \{1, \dots, N\}, i < j. \quad (2)$$

Метою є побудова конфігурації

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{Nd},$$

яка задовольняє всі геометричні обмеження та мінімізує радіус контейнера.

Математична модель задачі має такий вигляд:

$$R^* = \min_{(R, X) \in W} R. \quad (3)$$

де множина допустимих розв'язків  $W \subset \mathbb{R}^{Nd+1}$  визначається нерівностями (1), (2).

Це задача нелінійного програмування з великою кількістю обмежень та лінійною функцією цілі. Відомо, що її розв'язання є NP-складним, а глобальна оптимізація для великих  $d$  і  $N$  практично нездійсненна

## 2. Послідовна модель розміщення

Оскільки контейнерна область  $S(R)$  є кулею, а кожна розміщувана куля має відомий радіус  $r$ , то центр будь-якої кулі не може розташовуватися далі ніж на відстані  $R - r$  від початку координат. З цього безпосередньо випливає, що оптимальний радіус контейнера визначається найвіддаленішим центром серед усіх розміщених куль, тобто

$$R^*(x_1, x_2, \dots, x_N) = \max_i \|x_i\| + r. \quad (4)$$

Ця рівність означає, що змінна  $R$  не є незалежною оптимізаційною змінною: її оптимальне значення задається як функція від координат центрів. У термінах

математичної оптимізації це відповідає аналітичній згортці початкової задачі за параметром  $R$  (variable elimination). Внаслідок такої згортки відбувається проекція задачі на простір змінних  $X$ , а розмірність задачі зменшується на одиницю.

Таким чином, задача мінімізації радіуса контейнера еквівалентно перетворюється на мінімаксну задачу:

$$\min_{x_1, \dots, x_N} \max_i \|x_i\| \quad (5)$$

за умов ненакладання (2).

Такий перехід є типовою згорткою параметризованої задачі в теорії геометричної оптимізації, який дає змогу уникнути окремої оптимізації за  $R$  та працювати лише у просторі конфігурацій центрів.

Розглянемо послідовну конструктивну схему. Нехай на кроці  $k$  уже побудовано допустимі центри  $x_1, \dots, x_{k-1}$  і потрібно знайти положення нової кулі  $k$ .

Локальна задача для наступної кулі набуває вигляду

$$x_k^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^d} \left\{ \|x\|^2 : \|x - x_i\|^2 \geq 4r^2, i = 1, \dots, k-1 \right\}. \quad (6)$$

Таким чином, локальна послідовна мінімізація норми кожної кулі є прямим наслідком згортки параметра (4) та еквівалентного переходу до мінімаксної постановки (5), (2).

Функція цілі

$$f(x) = \|x\|^2 \quad (7)$$

є опуклою. Множина допустимих розв'язків визначається перетином зовнішніх областей куль

$$D^{(k)} = \bigcap_{i=1}^{k-1} \{x : \|x - x_i\|^2 \geq 4r^2\}, \quad (8)$$

що є неопуклою із складною геометрією для довільного  $d$ . Ілюстрацію множини допустимих рішень для  $d = 2$  наведено на рис. 1.

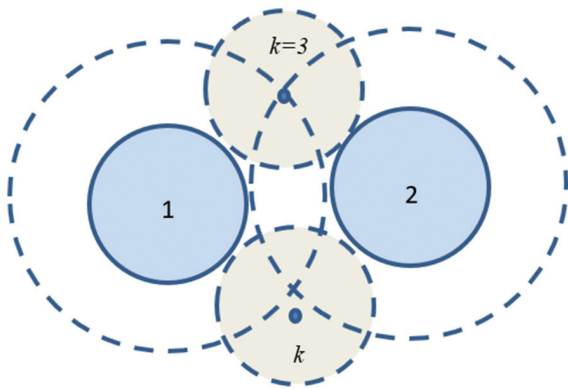


Рис. 1. Ілюстрація множини допустимих розв'язків

Мінімум задачі (6) знаходиться у крайніх точках множини допустимих рішень, які визначаються системами відповідних рівнянь. Для отримання такої точки необхідно розв'язати систему  $d$  сумісних квадратичних рівнянь методом виключення змінних. Такі точки визначаються системами рівнянь вигляду

$$\|x - x_j\|^2 \geq 4r^2, j = 1, \dots, d \quad (9)$$

Розв'язання кожної системи (9) зводиться до послідовного виключення змінних у системі із  $d$  квадратичних рівнянь. Однак далеко не всі розв'язки таких систем є припустимими: частина з них не належить множині  $D^{(k)}$  через порушення інших нерівностей у (8). Гарантований пошук глобального мінімуму вимагає повного перебору всіх можливих комбінацій активних обмежень, тобто всіх підмножин сусідніх куль. Кількість таких комбінацій зростає зі збільшенням  $d$  і  $k$ , що робить повний перебір обчислювально неприйнятним.

Зважаючи на те, що метою є отримання швидкого локального (а не глобально оптимального) розв'язку на кожному кроці, компромісом є дослідження лише частини крайніх точок. Ефективним способом реалізації цього підходу є використання мультістартової стратегії, коли задача (6) розв'язується засобами локальної оптимізації з декількох стартових точок. Це істотно зменшує ймовірність потрапляння у неякісну конфігурацію.

Слід також відзначити важливу особливість задачі (6): множини крайніх точок для послідовних куль  $k$  та  $k+1$  відрізняються лише кількома новими обмеженнями (додається умова відносно шойно розміщеної кулі). Ілюстрацію трьох положень кулі  $k=4$  для  $d=2$ , які відповідають крайнім точкам множини  $D^{(4)}$ , наведено на рис. 2. Зрозуміло, що якщо четверту кулю буде розміщено у будь-якому з положень, то для п'ятої дві крайні точки залишаться.

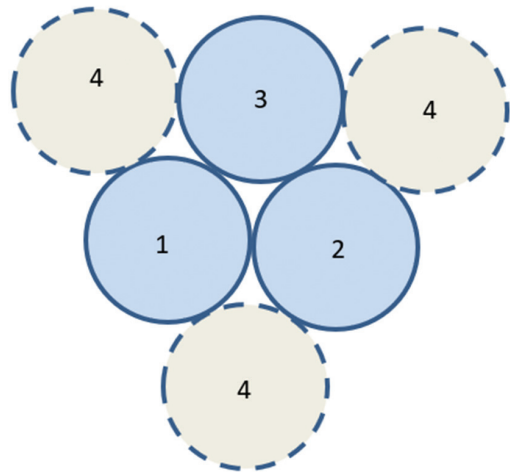


Рис. 2. Ілюстрація положень кулі  $k=4$  для  $d=2$ , які відповідають крайнім точкам множини  $D^{(4)}$

Тому для перших куль немає необхідності використовувати багато стартових точок, оскільки геометрія задачі ще відносно проста. Натомість для останніх куль, коли структура обмежень значно ускладнюється, роль мультістарту зростає: більша кількість стартових позицій дозволяє уникати небажаних локальних мінімумів та підвищити якість кінцевої конфігурації без значного зростання обчислювальних витрат.

### 3. Локалізація пошуку

Зі зростанням  $d$  і  $k$  кількість обмежень в локальній задачі (6) збільшується і повний перебір крайніх точок множини допустимих рішень  $D^{(k)}$  є обчислювально надто дорогим. Тому розроблено спеціальну процедуру, яка дає змогу уникнути розгляду великої кількості неактивних нерівностей.

Першу кулю розміщуємо на початку координат – це безумовний мінімум цільової функції цілі (7). Для вибору стартового положення решти куль використовується параметричний опис точок у евклідовому просторі  $\mathbb{R}^d$  у гіперсферичних (полярних, сферичних) координатах, який дає змогу рівномірно породжувати початкові точки центрів куль у кулі радіуса  $\rho^{(k)} = R^{(k)} - r$ ,

$$\begin{aligned} \rho^{(k)} &= R^{(k)} - r, \\ R^{(k)} &= \max_{i \in \{1, \dots, k-1\}} \|x_i\| + 4r. \end{aligned} \quad (10)$$

Загальна формула для координат кулі:

$$\begin{aligned} x_l^{(k)} &= \rho \cos \varphi_l \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{l-1}, l = 1, \dots, d-1, \\ x_d^{(k)} &= \rho \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{d-1}, \end{aligned} \quad (11)$$

де значення радіус-вектора та кутових координат вибирається випадково на таких сегментах:

$$\rho \in [r, \rho^{(k)}], \varphi_1, \dots, \varphi_{d-2} \in [0, \pi], \varphi_{d-1} \in [0, 2\pi]. \quad (12)$$

Якщо для згенерованої за формулами (10)–(12) стартової точки для  $k = 2, 3, \dots, N$ , порушується хоча б одна з умов задачі (6), процедура побудови початкового наближення повторюється. Враховуючи, що  $\rho^{(k)}$  обирається таким, щоб було вільне місце для розміщуваної кулі, така процедура не створює суттєвих обчислювальних витрат.

В результаті отримуємо точку  $x_k^0 \in D^{(k)}$ .

Наступним етапом є пошук межової точки  $D^{(k)}$ . У будь-якій точці простору  $x_k^{(0)} \in \mathbb{R}^d$ , окрім початку координат, антиградієнт цільової функції (7) буде спрямований до початку координат. Тому виконуємо оптимізацію уздовж вектора, який з'єднує центр розміщуваної кулі  $x_k^{(0)}$  та початок координат, тобто уздовж вектора  $-x_k^{(0)}$ . Пошук межової точки  $x_k^{(1)}$  множини допустимих розв'язків  $D^{(k)}$  здійснюється методом дихотомії.

Далі формується множина індексів куль  $I^{(k)}$ , які мають не порожній перетин з кулею

$$B(x_k^{(1)}, \tau) = \{x : \|x - x_k^{(1)}\| \leq \tau\}, \quad (12)$$

$$I^{(k)} = \left\{ i \in \{1, \dots, k-1\} : \|x_i^* - x_k^{(1)}\| \leq \tau \right\}. \quad (13)$$

Тепер замість задачі (6) розв'язуємо задачу

$$x_k^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^d} \left\{ \|x\|^2 : \|x - x_i\|^2 \geq 4r^2, i \in I^{(k)} \right\}, \quad (14)$$

яка з урахуванням (12), (13) враховує обмеження на накладання лише з кулями в безпосередній близькості до розміщуваної кулі.

Ілюстрацію оптимізаційного процесу для  $d = 2$  показано на рис. 3. Тут активними будуть обмеження для накладання розміщуваної кулі 8 лише з кулями 1, 3, 4, 5, 6, тобто  $I^8 = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ .

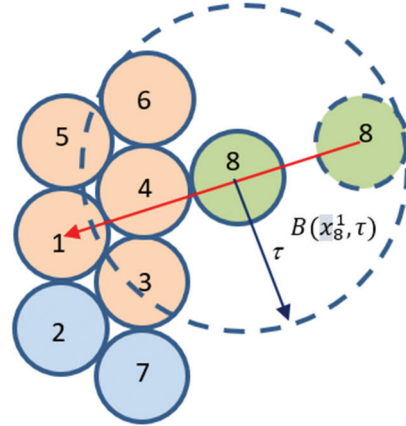


Рис. 3. Ілюстрація локального пошуку

### 4. Мультистартова стратегія

Задачі (6) та (14) є багатоекстремальними задачами нелінійного програмування з неопуклою множиною допустимих розв'язків. Тому локальний розв'язок значною мірою залежить від стартової точки. Щоб уникнути неякісних локальних екстремумів і не виконувати перебір усіх крайніх точок, доцільно застосувати мультистартову стратегію, яка виконує локальну оптимізацію для кулі  $k$  для набору стартових точок  $x_{k1}^{(0)}, x_{k2}^{(0)}, \dots, x_{kM_k}^{(0)}$ .

В результаті розв'язання задач (14) отримуємо відповідно точки  $x_{k1}^*, x_{k2}^*, \dots, x_{kM_k}^*$ . Вибираємо серед них той розв'язок, який має найменшу норму:

$$x_k^* = \arg \min_{l=1, \dots, M_k} \|x_{kl}^*\|. \quad (15)$$

Важливо зазначити, що множини активних обмежень для двох сусідніх кроків  $k$  та  $k+1$  відрізняються лише додаванням декількох обмежень. Це означає, що на ранніх етапах геометрія задачі є простою, і невелика кількість стартових точок достатня для знаходження якісного розв'язку. Натомість, на пізніх етапах, коли кількість крайніх точок значно збільшується, слід збільшувати і кількість стартових точок, щоб зменшити ризик потрапляння в поганий локальний мінімум та забезпечити краще положення нової кулі (15).

Такий адаптивний підхід зберігає обчислювальну ефективність та дає змогу суттєво поліпшити якість конфігурації без значного збільшення витрат.

### 5. Числові результати

У цьому розділі наведено результати числових експериментів, проведених для оцінювання роботи запропонованої мультистартової послідовної стратегії локалізованого пошуку. Мета експериментів – дослідити, наскільки мультистартова стратегія дає змогу

поліпшити якість отримуваних розміщень порівняно з одностартовим алгоритмом та як змінюється поведінка методу для різних розмірностей простору.

Для кожної розмірності  $d \in \{2, 3, 4, 8, 24, 32, 64\}$  було згенеровано конфігурації з  $N = 100$  куль однакового радіуса у кулі мінімального радіуса. Для кожного значення  $d$  обчислювалися такі характеристики: мінімальний контейнерний радіус  $R^*$ , визначений за формулою згортки (4); час виконання алгоритму; поліпшення  $R^*$  порівняно з одностартовим алгоритмом.

Для числової оптимізації локальних задач використовувався солвер IPOPT [11], який добре зарекомендував себе для задач великої розмірності з нелінійними обмеженнями.

Для  $d = 2$  розміщення куль можна візуально перевірити. На рисунку 4 наведено ілюстрацію розміщення 100 кругів за мультістартовою процедурою. На відміну від одностартового варіанта, конфігурація є більш симетричною, а кількість “випадкових вироджень” значно менша, що підтверджує доцільність мультістарту.

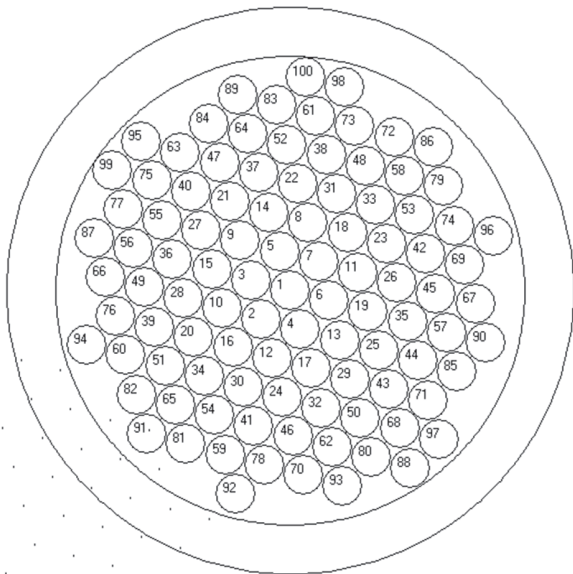


Рис. 4. Ілюстрація розміщення кругів за мультістартовою стратегією

Для  $d = 2, 3$  структура пакування наближається до фрагментів FCC/GCP-решіток, що можна спостерігати візуально.

Для більших розмірностей мультістарт дозволяє компенсувати частину геометричної деградації, притаманної високим вимірностям. Добре відомо, що для цих розмірностей існують щільні решіткові пакування D4, E8 та решітка Ліча L24. Хоча контейнерне обмеження не дає можливості відтворити решітку у первісному вигляді, мультістартова стратегія наближає розміщення до структур, подібних до фрагментів оптимальних решіток.

Для  $d = 32, 64$  експерименти демонструють робастність та масштабованість методу. контейнерний

радіус змінюється незначно, а час виконання зростає помірно завдяки локальній природі пошуку й адаптивній кількості стартових точок.

У таблиці 1 наведено порівняння результатів одностартового жадібного алгоритму  $R_{single}^*$  та запропонованої мультістартової стратегії  $R_{multy}^*$  для всіх тестованих розмірностей.

Таблиця 1

Характеристики конфігурацій багатовимірних куль

$d$	$R_{single}^*$	час, с	$R_{multy}^*$	час, с
2	13,1642	12	11,5829	55
3	6,7564	15	6,3265	71
4	4,8360	18	4,7654	89
8	3,0019	30	3,0011	154
24	2,9976	59	2,9972	295
32	2,9972	86	2,9970	437
64	3,0080	180	2,9966	907

Мультістартова стратегія дає менший радіус контейнера для більшості протестованих значень  $d$ . Розміщення стають геометрично більш регулярними; структура має більше «центрування» та менше локальних артефактів. Часу виконання алгоритму оцінюється як  $O(N^2 d M_k)$ .

### Висновки

У роботі запропоновано та досліджено мультістартову послідовну стратегію розміщення неперетинних гіперкуль у багатовимірних просторах усередині контейнерної кулі мінімального можливого радіуса. Запропонований підхід ґрунтується на редукції вихідної min–max задачі до послідовності локальних задач мінімізації норми, що природним чином впливає зі згортки параметра контейнера. Така конструкція дозволяє уникнути високої розмірності початкової постановки та зберегти її геометричну інтерпретацію.

Введено поліпшений механізм локалізації пошуку, який обмежує оптимізацію лише тими обмеженнями, що можуть стати активними, та використовує адаптивну оцінку максимально можливої області розміщення для нової кулі. Це суттєво зменшує розмірність локальних задач та дозволяє ефективно працювати у просторах великої розмірності.

Ключовим елементом методу є мультістартова стратегія, що передбачає розв’язання локальної задачі з кількох стартових точок. Такий підхід компенсує залежність від початкових умов, характерну для одностартових жадібних методів, і дає змогу значно знизити ймовірність потрапляння у небажаний локальний мінімум. Особливо це актуально в пізніх кроках алгоритму, коли кількість крайніх точок значно збільшується. Адаптивне збільшення кількості стартових точок для останніх куль забезпечує поліпшення

розташування конфігурації без суттєвого зростання обчислювальної складності.

Числові експерименти підтверджують ефективність мультістартового підходу порівняно з одностартовим алгоритмом. Крім того, мультістарт дозволяє формувати геометрично більш регулярні конфігурації та демонструє стійкість результатів навіть у високих розмірностях. При цьому час виконання алгоритму зростає помірно завдяки локальному характеру оптимізації та обмеженню кількості активних обмежень.

Таким чином, запропонована мультістартова стратегія є ефективним, масштабованим та обчислювально недорогим підходом для побудови допустимих розміщень багатовимірних куль у задачах великої розмірності. Метод може використовуватися як самостійний інструмент формування конфігурацій або як початковий етап для подальших локальних чи глобальних методів удосконалення.

#### Список літератури.

- [1] Conway J. H., Sloane N. J. A. (1999). Sphere Packings, Lattices and Groups, Springer New York, NY. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6568-7>. Стоян Ю.Г., Яськов Г.М., Романова Т.Є., Яковлев С.В. (2021). Пакування сферичних об'єктів: моделі, методи, застосування. Київ: Наукова думка, 279 с.
- [2] Litvinchev I., Fischer A., Romanova T., Stetsyuk P. (2024). A New Class of Irregular Packing Problems Reducible to Sphere Packing in Arbitrary Norms. *Mathematics* 12(7), 935. <https://doi.org/10.3390/math12070935>.
- [3] Torquato S., Uche O. U., Stillinger F. H. (2006). Random sequential addition of hard spheres in high
- [4] Euclidean dimensions. *Phys. Rev. E* 74(6), 061308. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.74.061308>.
- [5] Ryan B. Jadrich, Beth A. Lindquist, Thomas M. Truskett (2022). Treating random sequential addition via the replica method. *J. Chem. Phys.* 157 (8), 084116. <https://doi.org/10.1063/5.0096276>.
- [6] Cohn H., Kumar A., Miller S., Radchenko D., Viazovska M. (2022). Universal optimality of the  $E_8$  and Leech lattices and interpolation formulas. *Ann. of Math. (2)* 196 (3), pp. 983–1082. <https://doi.org/10.4007/annals.2022.196.3.3>.
- [7] Chen B., et al. (2023). Geometrically-Shaped Multi-Dimensional Modulation Formats in Coherent Optical Transmission Systems. *Journal of Lightwave Technolog*, 41(3), pp. 897–910. <https://doi.org/10.1109/JLT.2022.3204101>.
- [8] Favano A., Ferrari M., Magarini M., Barletta L. (2023). A Sphere Packing Bound for Vector Gaussian Fading Channels Under Peak Amplitude Constraints. *IEEE Transactions on Information Theory*. 69(1), pp. 238–250. <https://doi.org/10.1109/TIT.2022.3203293>.
- [9] Chen B. et al. (2025). On Shaping Gain of Multidimensional Constellations in Linear and Nonlinear Optical Fiber Channel, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications* 43(5), pp. 1455–1468. <https://doi.org/10.1109/JSAC.2025.3543507>.
- [10] Wang X., Fujisawa M., Mikawa M. (2023). XProtoSphere: an eXtended multi-sized sphere packing algorithm driven by particle size distribution. *Vis Comput* 39, pp. 3333–3346. <https://doi.org/10.1007/s00371-023-02977-w>.
- [11] Andrei, N. (2022). Interior-Point Filter Line-Search. In: *Modern Numerical Nonlinear Optimization*. Springer Optimization and Its Applications, vol 195, pp. 661–678. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-08720-2\\_19](https://doi.org/10.1007/978-3-031-08720-2_19).

*Received (Надійшла) 22.12.2025*

*Accepted for publication (Прийнята до друку) 20.01.2026*

*Publication date (Дата публікації) 27.03.2026*