УДК 656::004.942 DOi 10.30837/ bi.2023.1(99).08

Л. М. Козачок[1], С. М. Неронов[2], Г. А. Плєхова[3],
М. В. Костікова[4], К. В. Плеша[5]

[1]ХНАДУ, м. Харків, Україна, LarisaK2010@ukr.net, ORCID iD: 0000-0002-5246-4240
[2]ХНАДУ, м. Харків, Україна, sernikner@gmail.com, ORCID iD: 0000-0003-2381-1271
[3]ХНАДУ, м. Харків, Україна, plehovaanna11@gmail.com, ORCID iD: 0000-0002-6912-6520
[4]ХНАДУ, м. Харків, Україна, kmv_topaz@ukr.net, ORCID iD: 0000-0001-5197-7389
[5]kirplesha@gmail.com, ORCID iD: 0000-0002-9908-558X

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ТРАНСПОРТНИХ ПОТОКІВ ТА ПРОЦЕСІВ ТРАНСПОРТНИХ СИСТЕМ МІСТ

Ставиться та вирішується задача математичного моделювання та дослідження транспортних потоків та процесів транспортних систем міст. Розглядаються зв’язані роботи, методи, моделювання інтенсивності транспортного потоку як процесу авторегресії першого порядку, знаходження оцінок параметрів моделі процесу зі стандартною нормальною випадковою складовою.

МОДЕЛЮВАННЯ, ТРАНСПОРТНА МЕРЕЖА, ТРАНСПОРТНИЙ ПОТІК, АВТОРЕГРЕСІЯ, ПАРАМЕТР, ДЕЦЕНТРАЛІЗОВАНІ СХОВИЩА ДАННИХ,СТИСНЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ

The problem of mathematical modeling and research of transport flows and processes of transport systems of cities is set and solved. Related works, methods, modeling of traffic flow intensity as a first-order autoregression process, finding estimates of process model parameters with a standard normal random component are considered.

MODELING, TRANSPORT NETWORK, TRANSPORT FLOW, AUTOREGRESSION, PARAMETER, DECENTRALIZED DATA STORAGE, IMAGE COMPRESSION

Вступ

Транспорт – це переміщення людей та товарів з одного місця в інше з використанням різних транспортних засобів у різних інфраструктурних системах.

Якщо сільське господарство та промисловість вважаються тілом країни, можна сказати, що транспорт може бути нервами та венами економіки.

Збільшення кількості транспортних засобів за рахунок збільшення доступності більшої кількості пунктів призначення дозволяє краще досягати виконання економічних цілей та інтересів людей, але тягне за собою нові витрати як на індивідуальному, так і на соціальному рівні. Необхідно керувати розвитком та роботою транспорту, створювати транспортні системи, планувати їх функціонування. Таким чином, змінюючи доступність, транспорт надає форму розвитку територій.

Вхідні, вихідні дані та кінцеві результати транспортування для моделей дослідження транспортних перевезень представляють традиційні ресурси (інфраструктура), робоча сила, необхідна для виробництва та обслуговування транспортних засобів, земля, що споживається інфраструктурою, витрати енергії та інше. Проектування систем, що дозволяють організувати транспортні перевезення, як пасажирські, так і вантажні, знизити чи мінімізувати споживання енергії, вимагає мислення, що виходить поза традиційних дисциплінарних кордонів. Необхідний аналіз процесів, що відбуваються в транспортних системах, моделювання окремих частин функціонування транспорту щодо аналізу різних величин, що характеризують транспортні перевезення та транспортні мережі, з використанням яких транспортні перевезення здійснюються. А також безліч завдань вимагають вирішення з використанням побудованих моделей та написанням алгоритмів здійснення процесів з транспортних перевезень, планування та управління роботою транспорту. Зважаючи на використання великих обсягів даних для вирішення поставлених завдань застосовується комп’ютерна техніка, а також розроблені комп’ютерні системи та технології.

Транспортна мережа – мережа магістральних вулиць та доріг, оснащених лініями громадського транспорту.

1. Зв’язані роботи

Якість функціонування будь-якої системи визначається кількісними показниками ефективності її роботи. Розроблені відповідні методи визначення різних показників, які характеризують процеси, що відбуваються у системах, це дає змогу знаходити найефективнішу організацію цих процесів.

При вирішенні завдань дослідження потоку автотранспортних засобів враховується два випадкові фактори – час надходження автомобіля до транспортної мережі, як до системи та час обслуговування – перебування у мережі. Важливою характеристикою роботи системи, що моделюється для дослідження, є інтенсивність потоку подій, тобто інтенсивність надходження подій до системи, інтенсивність вхідного потоку, яка лише в окремих випадках розглядається як постійна величина, а в основному змінюється з часом. Саме ця характеристика і досліджується у цій роботі.

Велика кількість процесів, що спостерігаються або досліджуються, добре описуються моделлю авторегресії, тобто моделлю, у якій стан динамічної системи у даний момент часу лінійно залежить від попередніх станів цієї ж динамічної системи. Таким чином, авторегресійна модель – це модель часового ряду, рівнями якого є значення деякої досліджуваної величини або характеристики, яка використовується для аналізу – виявлення тенденції, періодичності, сезонності та інших особливостей значень та для прогнозування змін величини чи характеристики. Часто часові ряди, які погано описуються авторегресійною моделлю, при певній модифікації значень часового ряду (наприклад, логарифмування, потенціювання або розгляд приростів часового ряду деякого порядку) значно краще накриваються цією моделлю [1, 2].

Однак класична авторегресійна модель не враховує періодичність або сезонність повною мірою, тому що її параметри постійні і не змінюються з часом, від цього її застосування обмежене. Цього недоліку позбавлена загальніша модель авторегресійного типу [3]. Йдеться про моделі періодичної авторегресії, параметри якої змінюються у часі на кожному кроці, але повторюються через певний період. Подібні моделі можуть застосовуватись в аналізі різних часових рядів, у яких спостерігається виражена сезонність.

У моделі стан процесу лінійно залежить від свого попереднього стану. При цьому значення параметрів з наступним кроком змінюються, але повторюються з певною періодичністю. Тобто модель є лінійною, і вона може враховувати періодичність часового ряду. Також у модель додана випадкова складова, що є випадковими величинами, розподіленими за певним законом.

2. Методи

Дорожній трафік можна розглядати як потік автомашин, автотранспортних засобів, що приймають участь у дорожньому русі та заїжджають у транспортну мережу, що розглядається, і рухаються ділянками транспортної мережі. Потоком подій називається послідовність подій, які відбуваються одна за одною у випадкові моменти часу. Потік подій можна зобразити у вигляді послідовності випадкових точок t_1, t_2, ..., t_n, ... на вісі *Ot*, де n – кількість подій у потоці, а точки відображають моменти часу настання подій, в наших дослідженнях це моменти часу заїзду автомобілів на ділянки доріг, що входять у транспортну мережу, що розглядається. Випадкові інтервали часу між цими точками визначаються за формулами: $T_1 = t_2 - t_1$, $T_2 = t_3 - t_2$, ..., $T_{n-1} = t_n - t_{n-1}, \ldots$.

Нехай випадкова величина $X(t, \Delta t)$ – число подій, що з'явилися на проміжку $(t, t+\Delta t)$, у якості подій розглядається заїзд автомобіля у транспортну мережу, а для чисельного відображення фіксується момент часу цього заїзду. Якщо обчислювати границю відношення математичного очікування цієї випадкової величини до довжини інтервалу часу, що розглядається, при прямуванні цієї довжини до нуля і якщо ця границя існує, то вона називається інтенсивністю ординарного потоку подій у момент t, в наших дослідженнях це інтенсивність потоку автомобілей у транспортній мережі:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M\left(X(t, \Delta t)\right)}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Таким чином, інтенсивністю потоку називається середнє число подій, які відбуваються за одиницю часу.

3. Моделювання інтенсивності транспортного потоку як процесу авторегресії першого порядку

Розглядається модель знаходження значень рівнів часового ряду інтенсивності транспортного потоку на певному маршруті та на певній трасі вуличної дорожньої мережі міста.

Якщо стан моделі, а тобто і значення часового ряду інтенсивності транспортного потоку можна записати у вигляді лінійної функціональної залежності наступного значення від попереднього, параметри якої теж залежать від часу і при цьому змінюються з певною періодичністю, то ми матимемо авторегресію першого порядку.

Розглянемо один із самих зручних у застосуванні варіантів моделі: порядок моделі дорівнює одному, період моделі дорівнює двом.

Тоді модель має вигляд:

$$\lambda_t = a(t)\lambda_{t-1} + \varepsilon_t^{\infty}, \qquad (2)$$

де ε_t^{∞} – послідовність незалежних випадкових величин таких, що математичне очікування дорівнює 0, дисперсія позитивна.

Параметр $a(t)$ періодичний із періодом $T = 2$. Тобто, $\forall k > 0 : a(t) = a(t + kT)$.

$\sigma^2(t)$ так само періодичний із періодом T. Види розподілів ε_t та ε_{t+kT} однакові.

Запишемо значення рівнів інтенсивності у вигляді більш придатного для знаходження значень

$$\lambda_t = a(t)\lambda_{t-1} + \varepsilon_t. \qquad (3)$$

Введемо вектори:

$$\Lambda_t = \begin{pmatrix} \lambda_{t-1} \\ \lambda_t \end{pmatrix}, \; E_t = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_t \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Побудуємо матрицю $A(t)$:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a(t) \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Отже,

$$\Lambda_t = A(t)\Lambda_{t-1} + E_t,\ \Lambda_t = A(t)A(t-1)\Lambda_{t-2} + A(t)E_{t-1} + E_t,$$

$$\Lambda_t = \begin{pmatrix} \lambda_{t-1} \\ \lambda_t \end{pmatrix}, E_t = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_t \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Розглянемо метод послідовного статистичного аналізу при оцінці параметрів моделі авторегресії: спочатку для випадку одиничної дисперсії, потім для випадку зі змінною дисперсією.

Значення параметрів моделі змінюються з кожним кроком процесу, що розглядається, при цьому в якості наступних кроків беруться наступні моменти, значення параметрів потім повторюються з певною періодичністю.

Особливістю таких оцінок є мінімізація обсягу вибірки за гарантованої якості оцінювання. Але на початку будуються непослідовні оцінки шляхом найменших квадратів. Особлива увага приділяється розподілу послідовних оцінок параметрів моделі.

4. Знаходження оцінок параметрів моделі процесу зі стандартною нормальною випадковою складовою

Розглянемо модель періодичної авторегресії першого порядку з періодом два:

$$\lambda_t = a(t)\lambda_{t-1} + \varepsilon_t\ ,t \geq 0\ , \quad (7)$$

де ε_t — послідовність незалежних стандартних нормальних величин.

Вважатимемо, що параметр $a(t) = a(1)$, коли t непарно і $a(t) = a(2)$, коли парно.

Тепер маємо:

$$\begin{cases} \lambda_{2t+1} = a^{(1)}\lambda_{2t} + \varepsilon_{2t+1}, \\ \lambda_{2t} = a^{(2)}\lambda_{2t-1} + \varepsilon_{2t}. \end{cases} \quad (8)$$

$$\lambda_{2t} = a^{(1)}a^{(2)}\lambda_{2t-1} + a^{(1)}\varepsilon_{2t} + \varepsilon_{2t+1}\,. \quad (9)$$

Тепер представимо λ_t наступним чином:

$$\lambda_t = \left(s_1(t)a^{(1)} + s_2(t)a^{(2)}\right)\lambda_{t-1} + \varepsilon_t\ , \quad (10)$$

де $s_1(t) = \dfrac{1-(-1)^t}{2}$, $s_2(t) = \dfrac{1+(-1)^t}{2}$.

При цьому виконуються наступні рівності:

$$s_1(t)s_2(t) = 0\,,\ \ s_1^2(t) = s_1(t)\,,\ s_2^2(t) = s_2(t)\,. \quad (11)$$

У результаті маємо таку систему різницевих рівнянь:

$$\lambda_t = s_1(t)a^{(1)}\lambda_{t-1} + s_2(t)a^{(2)}\lambda_{t-1} + \varepsilon_t\,. \quad (12)$$

Розглянемо певну кількість моментів часу від початку моменту розгляду інтенсивності та отримаємо оцінки для параметрів моделі за допомогою методу найменших квадратів. Шукаємо значення параметрів, при яких сума квадратів змін інтенсивності мінімальна, а випадкові відхилення моделі теж прямують до мінімуму: $t = \overline{1,N}$, $a^{(1)}$, $a^{(2)}$

$$\sum_{t=1}^{N}\left(\lambda_t - \left(s_1(t)a^{(1)}\lambda_{t-1} + s_2(t)a^{(2)}\lambda_{t-1}\right)\right)^2 \to \min\,. \quad (13)$$

Знайдемо частинні похідні функції, що оптимізується, та прирівняємо їх до нуля, тому що потрібна умова існування екстремуму функції двох змінних — це рівність нулю частинних похідних функції по змінним $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ а:

$$-2\sum_{t=1}^{N}\left(\lambda_t - \left(s_1(t)a^{(1)}\lambda_{t-1} + s_2(t)a^{(2)}\lambda_{t-1}\right)\right)s_1(t)\lambda_{t-1} = 0\,, \quad (14)$$

$$-2\sum_{t=1}^{N}(\lambda_t - \left(s_1(t)a^{(1)}\lambda_{t-1} + s_2(t)a^{(2)}l_{t-1}\right))s_2(t)\lambda_{t-1} = 0\,. \quad (15)$$

Складемо і розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{N}\left(\lambda_t - \left(s_1(t)a^{(1)}\lambda_{t-1} + s_2(t)a^{(2)}\lambda_{t-1}\right)\right)s_1(t)\lambda_{t-1} = 0\,, \\ \sum_{t=1}^{N}\left(\lambda_t - \left(s_1(t)a^{(1)}\lambda_{t-1} + s_2(t)a^{(2)}\lambda_{t-1}\right)\right)s_2(t)\lambda_{t-1} = 0\,. \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{N}s_1(t)\lambda_t\lambda_{t-1} = \sum_{t=1}^{N}\left(a^{(1)}s_1^2(t) + a^{(2)}s_1(t)s_2(t)\right)\lambda_{t-1}^2, \\ \sum_{t=1}^{N}s_2(t)\lambda_t\lambda_{t-1} = \sum_{t=1}^{N}\left(a^{(1)}s_1(t)s_2(t) + a^{(2)}s_2^2(t)\right)\lambda_{t-1}^2. \end{cases} \quad (17)$$

Використовуючи властивості, можемо записати $s_1(t)$, $s_2(t)$:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{N}s_1(t)\lambda_t\lambda_{t-1} = \sum_{t=1}^{N}a^{(1)}s_1(t)\lambda_{t-1}^2, \\ \sum_{t=1}^{N}s_2(t)\lambda_t\lambda_{t-1} = \sum_{t=1}^{N}a^{(2)}s_2(t)\lambda_{t-1}^2. \end{cases} \quad (18)$$

Звідси отримуємо вирази для оцінок:

$$a_N^{(1)} = \frac{\sum_{t=1}^{N}s_1(t)\lambda_t\lambda_{t-1}}{\sum_{t=1}^{N}s_1(t)\lambda_{t-1}^2}\,,\qquad a_N^{(2)} = \frac{\sum_{t=1}^{N}s_2(t)\lambda_t\lambda_{t-1}}{\sum_{t=1}^{N}s_2(t)\lambda_{t-1}^2}\,. \quad (19)$$

Таким чином, ми отримали оцінки параметрів моделі інтенсивності руху на певній ділянці траси за N моментами часу розгляду інтенсивності, але при цьому самі параметри залежать від часу та змінюються, що дає пристосування моделі до реальних умов, перерахунок параметрів при отриманні нових даних моделі.

Розглянемо тепер послідовні оцінки параметрів процесу, що виходять за допомогою деякої модифікації оцінок, отриманих методом найменших квадратів.

Вивчення інтенсивності руху проводяться до певного моменту зупинки, таким чином обсяг вибірки може бути випадковою величиною, і в момент зупинки досліджень можна визначити оцінку параметрів моделі. Позначимо $t_1(n)$ — момент зупинки розгляду процесу, оскільки параметр моделі в загальному випадку змінюється відповідно часу, то відповідно до моменту часу зупинки ми отримаємо точкову оцінку параметра моделі авторегресії $a^{(1)}_{t_1(n)}$.

Ми розглядаємо дві складові процесу та побудови його моделі, для іншої частини побудови моделі процесу момент зупинки та відповідна точкова оцінка будуть $t_2(n)$, $a^{(2)}_{t_2(n)}$, таким чином знімаємо залежність параметрів від часу та отримаємо точкові оцінки параметрів.

Особливістю таких оцінок є мінімізація обсягу вибірки за гарантованої якості оцінювання.

$$t_1(n) = \inf\left\{ N : \sum_{t=1}^{N} s_1(t)\lambda^2_{t\text{-}1} \ge n \right\},$$
$$t_2(n) = \inf\left\{ N : \sum_{t=1}^{N} s_2(t)\lambda^2_{t\text{-}1} \ge n \right\}. \quad (20)$$

$$a^{(1)}_{t_1(n)} = \frac{1}{n_1}\sum_{t=1}^{t_1(n)} s_1(t)\sqrt{\gamma^{(1)}_t}\lambda_{t-1}\lambda_t,$$
$$a^{(2)}_{t_2(n)} = \frac{1}{n_2}\sum_{t=1}^{t_2(n)} s_2(t)\sqrt{\gamma^{(2)}_t}\lambda_{t\text{-}1}\lambda_t. \quad (21)$$

Таким чином, кожному моменту часу відповідає певна оцінка параметрів моделі, тому обчислюючи послідовно оцінки, ми приходимо до значення оцінки, що нас задовольняє, а йому відповідає певний момент зупинки, тобто ми можемо далі не спостерігати за процесом, а на основі вибірки даних, що відповідає моменту зупинки, будувати адекватну модель з певною точністю.

Визначимо величини, яких не вистачає:

$$n_1 = \sum_{t=1}^{t_1(n)} s_1(t)\sqrt{\gamma^{(1)}_t}\lambda^2_{t\text{-}1},\; n_2 = \sum_{t=1}^{t_2(n)} s_2(t)\sqrt{\gamma^{(2)}_t}\lambda^2_{t\text{-}1}. \quad (22)$$

При цьому виконуються наступні рівності, які визначають значення величин

$$\gamma^{(1)}_t = \begin{cases} 1, \text{ якщо } 1 \le t < t_1(n), \\ \eta^{(1)}(n), \text{ якщо } t = t_1(B). \end{cases}$$
$$\gamma^{(2)}_t = \begin{cases} 1, \text{ якщо } 1 \le t < t_2(n), \\ \eta^{(2)}(n), \text{ якщо } t = t_2(n). \end{cases} \quad (23)$$

$\eta^{(1)}(n)$ та $\eta^{(2)}(n)$ можна визначити, вирішивши наступні рівняння:

$$\sum_{t=1}^{t_1(n)} s_1(t)\frac{\lambda^2_{t\text{-}1}}{\sigma^2_t} + \eta^{(1)}(n)\frac{\lambda^2_{t_1(n)\text{-}1}}{\sigma^2_t} = n,$$
$$\sum_{t=1}^{t_2(n)} s_2(t)\frac{\lambda^2_{t\text{-}1}}{\sigma^2_t} + \eta^{(2)}(n)\frac{\lambda^2_{t_2(n)\text{-}1}}{\sigma^2_t} = n. \quad (24)$$

Тоді визначаємо величини наступним чином:

$$\eta^{(1)}(n) = \frac{1}{\lambda^2_{t_1(n)\text{-}1}}\left(n - \sum_{t=1}^{t_1(n)\text{-}1} s_1(t)\lambda^2_{t-1} \right),$$
$$\eta^{(2)}(n) = \frac{1}{\lambda^2_{t_2(n)\text{-}1}}\left(n - \sum_{t=1}^{t_2(n)\text{-}1} s_2(t)\lambda^2_{t\text{-}1} \right). \quad (25)$$

Враховуючи те, що ε_k – незалежні стандартні нормальні випадкові величини, які відображають випадкову складову побудованої моделі, ми можемо записати ймовірність відхилення точкових оцінок параметрів моделі:

$$P_{a^{(1)}}\left\{ \frac{n_1}{\sqrt{n}}\left(a^{(1)}_{t_1(n)} - a^{(1)} \right) \le x \right\} = \Phi(x),\; x \in (-\infty; +\infty),$$
$$P_{a^{(2)}}\left\{ \frac{n_2}{\sqrt{n}}\left(a^{(2)}_{t_2(n)} - a^{(2)} \right) \le x \right\} = \Phi(x),\; x \in (-\infty; +\infty). \quad (26)$$

При цьому, $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, а величини мають нормальний закон розподілу з наступними параметрами $a^{(1)}_{t_1(n)}$, $a^{(2)}_{t_2(n)} N\left(a^{(1)}, \frac{n_1^2}{n} \right)$, $N\left(a^{(2)}, \frac{n_2^2}{n} \right)$.

Тобто послідовні оцінки параметрів періодичної авторегресії мають нормальний розподіл із середнім рівним істинному значенню параметрів та дисперсією, яка залежить від параметру n. Саме ця властивість і перевірятиметься у моделюванні.

Висновки

Таким чином, робимо висновок, що немає підстав відхиляти гіпотезу про нормальний закон розподілу величин $y^{(1)}_t$, $y^{(2)}_t$ при заданому рівні значущості.

Серед усіх значень моментів зупинки при певному моделюванні визначимо середнє значення моменту зупинки, що буде наближено визначати оптимальний обсяг множини значень інтенсивності руху для досліджень: $\overline{t_1}(n) = 615$, $\overline{t_2}(n) = 688$.

Список літератури:

[1] Николайчук Я. М., Возна Н. Я., Пітух І. Р. Проектування спеціалізованих комп'ютерних систем. – Тернопіль: ТНЕУ, 2010.– 392 с.

[2] Бізнес-моделювання й управління потоками робіт і документообігом в економічних системах: Монографія / В. С. Пономаренко, І. О. Золотарьова, С. В. Мінухін та ін. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2010. – 270 с.

[3] Кундрат А. М., Кундрат М. М. Науково-технічні обчислення засобами MathCAD. Навч. посібник. Рівне: НУВГП, 2014. – 252 с.

Надійшла до редколегії 10.10.2023