УДК 517.988 : 519.632

М.В. Сидоров

Харківський національний університет радіоелектроніки,
м. Харків, Україна, maxim.sidorov@nure.ua

МЕТОД ДВОБІЧНИХ ІТЕРАЦІЙ У ЧИСЕЛЬНОМУ АНАЛІЗІ ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ НАПІВЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Розглядається проблема побудови метода двобічних ітерацій розв'язання першої крайової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь. Запропоновано два підходи, засновані на використанні відповідно методу функцій Гріна і методу квазіфункцій Гріна-Рвачова. За допомогою цих методів розглядувана крайова задача зводиться до еквівалентного нелінійного інтегрального рівняння. Отримане інтегральне рівняння досліджується методами нелінійного аналізу у напівупорядкованих просторах, зокрема, з використанням результатів В.І. Опойцева з теорії гетеротонних операторів. При цьому будується ітераційна послідовність, яка двобічно збігається до єдиного додатного розв'язку відповідної крайової задачі.

СИСТЕМА НАПІВЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ, ПЕРША КРАЙОВА ЗАДАЧА, ДОДАТНИЙ РОЗВ'ЯЗОК, МЕТОД ФУНКЦІЙ ГРІНА, МЕТОД КВАЗІФУНКЦІЙ ГРІНА-РВАЧОВА, МЕТОД ДВОБІЧНИХ ІТЕРАЦІЙ

Сидоров М.В. Метод двусторонних итераций в численном анализе первой краевой задачи для системы полулинейных эллиптических уравнений. Рассматривается проблема построения метода двусторонних итераций решения первой краевой задачи для системы полулинейных эллиптических уравнений. Предложено два подхода, основанные на использовании соответственно метода функций Грина и метода квазифункций Грина-Рвачева. С помощью этих методов рассматриваемая краевая задача сводится к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению. Полученное интегральное уравнение исследуется методами нелинейного анализа в полуупорядоченных пространствах, в частности, с использованием результатов В.И. Опойцева из теории гетеротонных операторов. При этом строится итерационная последовательность, которая двусторонне сходится к единственному положительному решению соответствующей краевой задачи.

СИСТЕМА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ, МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА, МЕТОД КВАЗИФУНКЦИЙ ГРИНА-РВАЧЕВА, МЕТОД ДВУСТОРОННИХ ИТЕРАЦИЙ

Sidorov M.V. The method of two-sided iterations in the numerical analysis of the first boundary value problem for a system of semilinear elliptic equations. The problem of constructing a two-sided iteration method for solving the first boundary value problem for a system of semilinear elliptic equations is considered. Two approaches are proposed, based on the use of the Green functions method and the Green-Rvachev quasi-functions method, respectively. With the help of these methods, the considered boundary value problem is reduced to an equivalent nonlinear integral equation. The obtained integral equation is investigated by methods of nonlinear analysis in semi-ordered spaces, in particular, using the results of V.I. Opoicev from the theory of heterotone operators. In this case, an iterative sequence is constructed, which two-sided converges to the only positive solution of the corresponding boundary value problem.

SYSTEM OF SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS, FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM, POSITIVE SOLUTION, GREEN FUNCTIONS METHOD, GREEN-RVACHEV QUASI-FUNCTIONS METHOD, TWO-SIDED ITERATIONS METHOD

Вступ

Математичне моделювання різноманітних процесів у хімії, фізиці плазми, теорії горіння, біології тощо [1] призводить до необхідності розв'язання першої крайової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь. Зазвичай для таких задач не має можливості отримати точний розв'язок аналітичними методами, і вони піддаються лише дослідженню чисельними методами. Також такі задачі потребують дослідження проблеми існування та єдиності розв'язку [2–6]. У зв'язку з цим актуальною науковою проблемою є розробка нових та вдосконалення існуючих методів конструктивного дослідження нелінійних крайових задач для систем напівлінійних рівнянь, які б не тільки дозволяли з'ясовувати питання існування розв'язку, але й пропонували чисельний алгоритм його знаходження. Серед таких методів особливе місце належить методам двобічних ітерацій, які дозволяють апроксимувати невідомий розв'язок знизу та зверху двома послідовностями, а отже, надають можливість отримати для похибки наближеного розв'язку зручну апостеріорну оцінку [7–9].

Метою роботи є розробка нових методів двобічних ітерацій розв'язання першої крайової задачі для системи напівлінійних еліптичних рівнянь.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі:

– замінити першу крайову задачу для системи напівлінійних еліптичних рівнянь операторним рівнянням з гетеротонним оператором;

– з використанням теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах, зокрема, результатів В.І. Опойцева про розв'язність операторних рівнянь з гетеротонним оператором [7], розробити метод двобічних ітерацій розв'язання отриманого нелінійного інтегрального рівняння.

Дана робота продовжує дослідження, розпочаті у [10, 11] і узагальнює їх на випадок напівлінійних еліптичних систем більш загального вигляду.

1. Постановка задачі

Розглядатимемо проблему знаходження додатного розв'язку першої крайової задачі для системи n напівлінійних еліптичних рівнянь:

$$-\operatorname{div}(p_i(\mathbf{x})\nabla u_i)+q_i(\mathbf{x})u_i=f_i(\mathbf{x},u_1,\ldots,u_n)\,,\ \mathbf{x}\in\Omega\,, \quad (1)$$

$$u_i(\mathbf{x})>0\,,\ \mathbf{x}\in\Omega\,, \quad (2)$$

$$u_i\big|_{\partial\Omega}=0\,,\ i=1,\ldots,n\,, \quad (3)$$

де Ω – обмежена вимірна за Жорданом область з $\mathbb{R}^2$ чи $\mathbb{R}^3$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$ ($\bar\Omega=\Omega\cup\partial\Omega$); $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$, якщо $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, і $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$, якщо $\Omega\subset\mathbb{R}^3$.

Вважатимемо, що для всіх $i=1,2,\ldots,n$

$$p_i(\mathbf{x})>0 \text{ у } \bar\Omega\,,\ q_i(\mathbf{x})\ge 0 \text{ у } \bar\Omega\,, \quad (4)$$

$p_i(\mathbf{x})$ неперервно диференційовані у $\bar\Omega$,

$q_i(\mathbf{x})$ неперервні у $\bar\Omega$,

$f_i(\mathbf{x},u_1,\ldots,u_n)$ неперервні і додатні

$$\text{при } \mathbf{x}\in\bar\Omega\,,\ u_1,\ldots,u_n>0\,. \quad (5)$$

У векторній формі задача (1) – (3) запишеться у вигляді

$$-\operatorname{div}(\mathbf{p}(\mathbf{x})\nabla\mathbf{u})+\mathbf{q}(\mathbf{x})\mathbf{u}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})\,,\ \mathbf{x}\in\Omega\,,$$

$$\mathbf{u}>\boldsymbol{\theta}\,,\ \mathbf{x}\in\Omega\,,$$

$$\mathbf{u}\big|_{\partial\Omega}=\boldsymbol{\theta}\,.$$

Тут $\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_n)$, $\mathbf{p}(\mathbf{x})=(p_1(\mathbf{x}),\ldots,p_n(\mathbf{x}))$, $\mathbf{q}(\mathbf{x})=(q_1(\mathbf{x}),\ldots,q_n(\mathbf{x}))$, $\mathbf{f}=(f_1,\ldots,f_n)$, $\boldsymbol{\theta}=(0,\ldots,0)$.

Нерівність $\mathbf{u}>\boldsymbol{\theta}$ та подібні до них нерівності розумітимемо у тому сенсі, що $u_i>0$ для всіх $i=1,\ldots,n$.

2. Побудова методу двобічних ітерацій на основі використання функції Гріна

Від задачі (1) – (3) перейдемо до еквівалентної системи з n інтегральних рівнянь Гаммерштейна вигляду

$$u_i(\mathbf{x})=\int_\Omega G_i(\mathbf{x},\mathbf{s})f_i(\mathbf{s},u_1(\mathbf{s}),\ldots,u_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s}\,,\ i=1,\ldots,n\,, \quad (6)$$

де $G_i(\mathbf{x},\mathbf{s})$, $i=1,\ldots,n$, – функція Гріна першої крайової задачі для оператора $A_iu\equiv-\operatorname{div}(p_i(\mathbf{x})\nabla u)+q_i(\mathbf{x})u$ у області Ω; $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$, $\mathbf{s}=(s_1,s_2)$, якщо $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, і $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\mathbf{s}=(s_1,s_2,s_3)$, якщо $\Omega\subset\mathbb{R}^3$.

Функцією Гріна задачі (1) – (3) вважатимемо вектор-функцію $\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{s})=(G_1(\mathbf{x},\mathbf{s}),\ldots,G_n(\mathbf{x},\mathbf{s}))$, яка складається з функцій Гріна перших крайових задач для операторів A_iu, $i=1,\ldots,n$, у області Ω.

У векторній формі запису система (6) запишеться у вигляді

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})=\int_\Omega \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{s})\mathbf{f}(\mathbf{s},\mathbf{u}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}\,,$$

де

$$\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{s})\mathbf{f}(\mathbf{s},\mathbf{u}(\mathbf{s}))=$$

$$=(G_1(\mathbf{x},\mathbf{s})f_1(\mathbf{s},\mathbf{u}(\mathbf{s})),\ldots,G_n(\mathbf{x},\mathbf{s})f_n(\mathbf{s},\mathbf{u}(\mathbf{s})))\,.$$

Систему рівнянь (6) розглядатимемо у банаховому просторі

$$\mathbf{C}_n(\bar\Omega)=\{\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_n):u_i\in C(\bar\Omega),i=1,\ldots,n\}$$

вектор-функцій, неперервних у $\bar\Omega$, з нормою $\|\mathbf{u}\|_n=\max\{\|u_1\|,\ldots,\|u_n\|\}$, де $\|u_i\|=\max\limits_{\mathbf{x}\in\bar\Omega}|u_i(\mathbf{x})|$, $i=1,\ldots,n$. Виділимо у $\mathbf{C}^n(\bar\Omega)$ конус

$$\mathcal{K}_+=\{\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_n)\in\mathbf{C}^n(\bar\Omega):u_i(\mathbf{x})\ge 0,\mathbf{x}\in\bar\Omega,i=1,\ldots,n\}$$

вектор-функцій з невід'ємними координатами. Конус $\mathcal{K}_+$ у $\mathbf{C}^n(\bar\Omega)$ є нормальним (і навіть гострим).

За допомогою конуса $\mathcal{K}_+$ у просторі $\mathbf{C}^n(\bar\Omega)$ введемо напівупорядкованість за правилом:

$$\text{для } \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{C}^n(\bar\Omega)\ \ \mathbf{u}\leqslant\mathbf{v}\,,\text{ якщо } \mathbf{v}-\mathbf{u}\in\mathcal{K}_+\,,$$

тобто

$$\mathbf{u}\leqslant\mathbf{v}\,,\text{ якщо } u_i(\mathbf{x})\le v_i(\mathbf{x})$$

$$\text{для всіх } \mathbf{x}\in\bar\Omega \text{ і всіх } i=1,\ldots,n\,.$$

Якщо існує класичний розв'язок задачі (1) – (3), тобто така вектор-функція $\mathbf{u}^*\in\mathbf{C}_n^2(\Omega)\cap\mathbf{C}_n(\bar\Omega)$, яка задовольняє систему рівнянь (1) і умови (2), (3), то ця ж функція також задовольняє і систему рівнянь (6). Якщо ж класичний розв'язок не існує, то систему інтегральних рівнянь (6) можна взяти за основу означення узагальненого розв'язку задачі (1) – (3).

Означення 1. Розв'язком (узагальненим) задачі (1) – (3) називатимемо вектор-функцію $\mathbf{u}^*\in\mathcal{K}_+$, яка є розв'язком системи інтегральних рівнянь (6).

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор $\mathbf{T}$, який діє у $\mathbf{C}_n(\bar\Omega)$ за правилом, що визначається правою частиною системи рівнянь (6):

$$\mathbf{T}(\mathbf{u})(\mathbf{x})=\int_\Omega\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{s})\mathbf{f}(\mathbf{s},\mathbf{u}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}=$$

$$=\left(\int_\Omega G_1(\mathbf{x},\mathbf{s})f_1(\mathbf{s},u_1(\mathbf{s}),\ldots,u_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s},\ldots,\right.$$

$$\left.\int_\Omega G_n(\mathbf{x},\mathbf{s})f_n(\mathbf{s},u_1(\mathbf{s}),\ldots,u_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s}\right). \quad (7)$$

Розглянемо властивості має оператор $\mathbf{T}$ вигляду (7). Позначимо через T_i, $i=1,\ldots,n$, частковий оператор

$$T_i(\mathbf{u})(\mathbf{x})=\int_\Omega G_i(\mathbf{x},\mathbf{s})f_i(\mathbf{s},u_1(\mathbf{s}),\ldots,u_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s}\,. \quad (8)$$

Кожна з функцій Гріна $G_i(\mathbf{x},\mathbf{s})$, $i=1,\ldots,n$, неперервна при $\mathbf{x},\mathbf{s}\in\bar\Omega$, $\mathbf{x}\ne\mathbf{s}$, і справджуються оцінки

$$0\le G_i(\mathbf{x},\mathbf{s})\le k_0\left|\ln\frac{1}{r_{\mathbf{xs}}}\right| \text{ у } \mathbb{R}^2\,,\quad 0\le G_i(\mathbf{x},\mathbf{s})\le\frac{k_0}{r_{\mathbf{xs}}} \text{ у } \mathbb{R}^3\,,$$

де $r_{\mathbf{xs}}=|\mathbf{x}-\mathbf{s}|$ – відстань між точками $\mathbf{x}$ і $\mathbf{s}$.

Тоді, з урахуванням умови (5), можна зробити такий висновок: кожен з операторів T_i вигляду (8) діє з $\mathbf{C}_n(\bar{\Omega})$ в $C(\bar{\Omega})$ і, якщо $\mathbf{u}\in\mathcal{K}_+$, то $T_i(\mathbf{u})(\mathbf{x})\geq 0$ для всіх $\mathbf{x}\in\bar{\Omega}$, $i=1,...,n$, а отже, оператор $\mathbf{T}$ діє у $\mathbf{C}_n(\bar{\Omega})$ і $\mathbf{T}(\mathbf{u})\in\mathcal{K}_+$, тобто оператор $\mathbf{T}$ є додатним, бо залишає інваріантним конус $\mathcal{K}_+$.

Введемо до розгляду вектор-функцію $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ за формулою

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x})=(u_0^1(\mathbf{x}),...,u_0^n(\mathbf{x}))=$$

$$=\left(\int_\Omega G_1(\mathbf{x},\mathbf{s})d\mathbf{s},...,\int_\Omega G_n(\mathbf{x},\mathbf{s})d\mathbf{s}\right). \quad (9)$$

Для всіх $\mathbf{x}\in\bar{\Omega}$ значення кожного з операторів (8) оцінюється нерівністю

$$\alpha_i u_0^i(\mathbf{x})\leq T_i(\mathbf{u})(\mathbf{x})\leq\beta_i u_0^i(\mathbf{x}), \quad (10)$$

де $\alpha_i=\alpha_0^i\gamma_i>0$, $\beta_i=\max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} f_i(\mathbf{x},u_1(\mathbf{x}),...,u_n(\mathbf{x}))>0$.

Тут $\alpha_0^i>0$ таке, що існує множина $\Omega_0^i\subset\Omega$ така, що $\mu(\Omega_0^i)>0$ і $f_i(\mathbf{x},u_1(\mathbf{x}),...,u_n(\mathbf{x}))\geq\alpha_0^i$ для всіх $\mathbf{x}\in\Omega_0^i$, а $\gamma_i>0$ таке, що

$$\gamma_i\int_\Omega G_i(\mathbf{x},\mathbf{s})d\mathbf{s}\leq\int_{\Omega_0^i} G_i(\mathbf{x},\mathbf{s})d\mathbf{s}.$$

Тоді для всіх $\mathbf{x}\in\bar{\Omega}$ матиме місце подвійна нерівність

$$\alpha\mathbf{u}_0(\mathbf{x})\leq\int_\Omega \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{s})\mathbf{f}(\mathbf{s},\mathbf{u}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}\leq\beta\mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad (11)$$

де $\alpha=\min\{\alpha_1,...,\alpha_n\}>0$, $\beta=\max\{\beta_1,...,\beta_n\}>0$, яка означає, що оператор $\mathbf{T}$ є $\mathbf{u}_0$ -додатним.

Припустимо, що вектор-функція $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})$ дозволяє діагональне подання

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})=\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{u})=(\hat{f}_1(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{u}),...,\hat{f}_n(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{u})),$$

де неперервні за сукупністю змінних $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ функції $\hat{f}_i(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{w})=\hat{f}_i(\mathbf{x},v_1,...,v_n,w_1,...,w_n)$ монотонно зростають за всіма v_i і монотонно спадають за всіма w_i, $i=1,...,n$, для всіх $\mathbf{x}\in\Omega$. Тоді оператор $\mathbf{T}$ вигляду (7) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v},\mathbf{w})(\mathbf{x})=\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{s},\mathbf{v}(\mathbf{s}),\mathbf{w}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}=$$

$$=\left(\int_\Omega G_1(\mathbf{x},\mathbf{s})\hat{f}_1(\mathbf{s},v_1(\mathbf{s}),...,v_n(\mathbf{s}),w_1(\mathbf{s}),...,w_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s},...,\right.$$
$$\left.\int_\Omega G_n(\mathbf{x},\mathbf{s})\hat{f}_n(\mathbf{s},v_1(\mathbf{s}),...,v_n(\mathbf{s}),w_1(\mathbf{s}),...,w_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s}\right). \quad (12)$$

Оператори $\mathbf{T}$ і $\hat{\mathbf{T}}$ є цілком неперервними.

Позначимо також через $\hat{T}_i$, $i=1,...,n$, оператори

$$\hat{T}_i(\mathbf{v},\mathbf{w})(\mathbf{x})=$$

$$=\int_\Omega G_i(\mathbf{x},\mathbf{s})\hat{f}_i(\mathbf{s},v_1(\mathbf{s}),...,v_n(\mathbf{s}),w_1(\mathbf{s}),...,w_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s}=$$

$$=\int_\Omega G_i(\mathbf{x},\mathbf{s})\hat{f}_i(\mathbf{s},\mathbf{v}(\mathbf{s}),\mathbf{w}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}. \quad (13)$$

Оператор T_i вигляду (8) буде гетеротонним з супровідним оператором $\hat{T}_i$ вигляду (13).

Нехай для всіх додатних чисел v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_n і будь-якого $\tau\in(0,1)$ виконуються нерівності

$$\hat{f}_i\left(\mathbf{x},\tau\mathbf{v},\frac{1}{\tau}\mathbf{w}\right)>\tau\hat{f}_i(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{w}),\ \mathbf{x}\in\Omega,\ i=1,...,n. \quad (14)$$

Доведемо, що за виконання умов (14) гетеротонний оператор $\mathbf{T}$ вигляду (7), для якого оператор $\hat{\mathbf{T}}$ вигляду (12) є супровідним, буде псевдоувігнутим і навіть буде $\mathbf{u}_0$ -псевдоувігнутим з $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ вигляду (9).

Позначимо через $\mathbf{K}(\mathbf{u}_0)$ множину вектор-функцій $\mathbf{u}=(u_1,...,u_n)$ таких, для яких існують числа $\alpha,\beta>0$ такі, що $\alpha\mathbf{u}_0\leqslant\mathbf{u}\leqslant\beta\mathbf{u}_0$, тобто $\mathbf{K}(\mathbf{u}_0)$ складається з тих вектор-функцій $\mathbf{u}=(u_1,...,u_n)$, в яких $u_i\in K(u_0^i)$, $i=1,...,n$.

Для будь-яких $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathcal{K}_+\setminus\{\theta\}$, $\mathbf{v}=(v_1,...,v_n)$, $\mathbf{w}=(w_1,...,w_n)$, з нерівності (11) випливає, що

$$\alpha\mathbf{u}_0(\mathbf{x})\leq\int_\Omega \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{s})\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{s},\mathbf{v}(\mathbf{s}),\mathbf{w}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}\leq\beta\mathbf{u}_0(\mathbf{x}),$$

де $\alpha>0$, $\beta>0$, тобто $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v},\mathbf{w})\in\mathbf{K}(\mathbf{u}_0)$ для будь-яких $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathcal{K}_+\setminus\{\theta\}$.

За виконання умов (14) для будь-яких $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{K}(\mathbf{u}_0)$ і для всіх $\mathbf{x}\in\bar{\Omega}$ має місце нерівність

$$\hat{T}_i\left(\tau\mathbf{v},\frac{1}{\tau}\mathbf{w}\right)(\mathbf{x})=\int_\Omega G_i(\mathbf{x},\mathbf{s})\hat{f}_i\left(\mathbf{s},\tau\mathbf{v}(\mathbf{s}),\frac{1}{\tau}\mathbf{w}(\mathbf{s})\right)d\mathbf{s}>$$

$$>\tau\int_\Omega G_i(\mathbf{x},\mathbf{s})\hat{f}_i(\mathbf{s},\mathbf{v}(\mathbf{s}),\mathbf{w}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}=\tau\hat{T}_i(\mathbf{v},\mathbf{w})(\mathbf{x}),\ i=1,...,n,$$

а отже, для будь-яких $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{K}(\mathbf{u}_0)$ і для всіх $\mathbf{x}\in\bar{\Omega}$ матиме місце і нерівність

$$\hat{\mathbf{T}}\left(\tau\mathbf{v},\frac{1}{\tau}\mathbf{w}\right)(\mathbf{x})=\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\hat{\mathbf{f}}\left(\mathbf{s},\tau\mathbf{v}(\mathbf{s}),\frac{1}{\tau}\mathbf{w}(\mathbf{s})\right)d\mathbf{s}>$$

$$>\tau\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{s},\mathbf{v}(\mathbf{s}),\mathbf{w}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}=\tau\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v},\mathbf{w})(\mathbf{x}),$$

яка і означає псевдоувігнутість оператора $\mathbf{T}$ вигляду (7), для якого оператор $\hat{\mathbf{T}}$ вигляду (12) є супровідним.

Крім того, для всіх $\mathbf{x}\in\bar{\Omega}$ і $\tau\in(0,1)$ матиме місце нерівність

$$\hat{T}_i\left(\tau\mathbf{v},\frac{1}{\tau}\mathbf{w}\right)(\mathbf{x})=\int_\Omega G_i(\mathbf{x},\mathbf{s})\hat{f}_i\left(\mathbf{s},\tau\mathbf{v}(\mathbf{s}),\frac{1}{\tau}\mathbf{w}(\mathbf{s})\right)d\mathbf{s}\geq$$

$$\geq\tau(1+\eta_i)\int_\Omega G_i(\mathbf{x},\mathbf{s})\hat{f}_i(\mathbf{s},\mathbf{v}(\mathbf{s}),\mathbf{w}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}=$$

$$=\tau(1+\eta_i)\hat{T}_i(\mathbf{v},\mathbf{w})(\mathbf{x}),\ i=1,...,n,$$

де $\eta_i=\eta_i(\mathbf{v},\mathbf{w},\tau)>0$, $i=1,...,n$.

Тоді для всіх $\mathbf{x}\in\bar{\Omega}$ і $\tau\in(0,1)$ матимемо

$$\mathbf{T}\left(\tau\mathbf{v},\frac{1}{\tau}\mathbf{w}\right)(\mathbf{x})=\int_\Omega \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{s})\hat{\mathbf{f}}\left(\mathbf{s},\tau\mathbf{v}(\mathbf{s}),\frac{1}{\tau}\mathbf{w}(\mathbf{s})\right)d\mathbf{s}\geq$$

$$\geq\tau(1+\eta)\int_\Omega \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{s})\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{s},\mathbf{v}(\mathbf{s}),\mathbf{w}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}=\tau(1+\eta)\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v},\mathbf{w})(\mathbf{x}),$$

де $\eta=\min\{\eta_1,...,\eta_n\}>0$, а отже, оператор $\mathbf{T}$ вигляду (7) є $\mathbf{u}_0$ -псевдо-увігнутим оператором.

Отже, має місце таке твердження.

Лема 1. Оператор $\mathbf{T}$ вигляду (7), де $\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{s})$ – функція Гріна задачі (1) – (3), розглядуваний у просторі $\mathbf{C}_n(\bar{\Omega})$, напівупорядкованому конусом $\mathcal{K}_+$ невід'ємних функцій, має такі властивості:

а) є додатним оператором;

б) є $\mathbf{u}_0$ -додатним оператором, де вектор-функція $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ визначається рівністю (9);

в) є гетеротонним оператором, для якого оператор $\hat{\mathbf{T}}$ вигляду (12) є супровідним, якщо вектор-функція $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})$ дозволяє діагональне подання, тобто $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{u}) = (\hat{f}_1(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{u}),\dots,\hat{f}_n(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{u}))$, де неперервні за сукупністю змінних $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ функції $\hat{f}_i(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \hat{f}_i(\mathbf{x},v_1,\dots,v_n,w_1,\dots,w_n)$ монотонно зростають за всіма v_i і монотонно спадають за всіма w_i, $i=1,\dots,n$, для всіх $\mathbf{x}\in\Omega$;

г) якщо виконуються нерівності (14) є псевдоувігнутим і навіть $\mathbf{u}_0$-псевдоувігнутим оператором, де функція $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ має вигляд (9).

Побудуємо метод двобічних ітерацій знаходження додатного розв'язку системи інтегральних рівнянь (6) (а отже, і крайової задачі (1) – (3)), вважаючи, що оператор $\mathbf{T}$ вигляду (7) є гетеротонним з супровідним оператором вигляду (12).

У конусі $\mathcal{K}_+$ виділимо сильно інваріантний конусний відрізок $<\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0>$, $\mathbf{v}^0 = (v_1^0,\dots,v_n^0)$, $\mathbf{w}^0 = (w_1^0,\dots,w_n^0)$, умовами:

$$\int_\Omega G_i(\mathbf{x},\mathbf{s})\,\hat{f}_i(\mathbf{s},v_1^0(\mathbf{s}),\dots,v_n^0(\mathbf{s}),w_1^0(\mathbf{s}),\dots,w_n^0(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \ge v_i^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x}\in\bar\Omega, \tag{15}$$

$$\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\,\hat{f}_i(\mathbf{s},w_1^0(\mathbf{s}),\dots,w_n^0(\mathbf{s}),v_1^0(\mathbf{s}),\dots,v_n^0(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \le w_i^0(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x}\in\bar\Omega, \tag{16}$$

$$i=1,\dots,n.$$

Сформуємо ітераційний процес за схемою

$$v_i^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega G_i(\mathbf{x},\mathbf{s})\,\hat{f}_i(\mathbf{s},v_1^{(k)}(\mathbf{s}),\dots,v_n^{(k)}(\mathbf{s}),w_1^{(k)}(\mathbf{s}),\dots,w_n^{(k)}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \tag{17}$$

$$w_i^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega G_i(\mathbf{x},\mathbf{s})\,\hat{f}_i(\mathbf{s},w_1^{(k)}(\mathbf{s}),\dots,w_n^{(k)}(\mathbf{s}),v_1^{(k)}(\mathbf{s}),\dots,v_n^{(k)}(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \tag{18}$$

$$i=1,\dots,n,\ k=0,1,2,\dots;$$

$$v_i^{(0)}(\mathbf{x}) = v_i^0(\mathbf{x}),\ w_i^{(0)}(\mathbf{x}) = w_i^0(\mathbf{x}),\ i=1,\dots,n. \tag{19}$$

З сильної інваріантності конусного відрізка $<\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0>$ та гетеротонності оператора $\mathbf{T}$ вигляду (7), для якого оператор $\hat{\mathbf{T}}$ вигляду (12) є супровідним, випливає, що послідовність $\{\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x})\}$ не спадає за конусом $\mathcal{K}_+$, а послідовність $\{\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{x})\}$ не зростає за конусом $\mathcal{K}_+$. Тоді з огляду на нормальність конуса $\mathcal{K}_+$ і повну неперервність оператора $\hat{\mathbf{T}}$ можна зробити висновок про існування границь $\mathbf{v}^*(\mathbf{x})$ і $\mathbf{w}^*(\mathbf{x})$ цих послідовностей. Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^{(0)} \leqslant \mathbf{v}^{(1)} \leqslant \dots \leqslant \mathbf{v}^{(k)} \leqslant \dots \leqslant \mathbf{v}^* \leqslant \mathbf{w}^* \leqslant \dots \leqslant \mathbf{w}^{(k)} \leqslant \dots \leqslant \mathbf{w}^{(1)} \leqslant \mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}^0.$$

При цьому можливі два випадки: $\mathbf{v}^* < \mathbf{w}^*$ і $\mathbf{v}^* = \mathbf{w}^*$. У другому випадку $\mathbf{u}^* := \mathbf{v}^* = \mathbf{w}^*$ – єдина на конусному відрізку $<\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0>$ нерухома точка оператора $\mathbf{T}$, а отже, $\mathbf{u}^*$ – єдиний на $<\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0>$ розв'язок розглядуваної крайової задачі (1) – (3).

Вектор-функції $\mathbf{v}^* = (v_1^*,\dots,v_n^*)$ і $\mathbf{w}^* = (w_1^*,\dots,w_n^*)$ є розв'язком системи $2n$ нелінійних інтегральних рівнянь

$$v_i(\mathbf{x}) = \int_\Omega G_i(\mathbf{x},\mathbf{s})\,\hat{f}_i(\mathbf{s},v_1(\mathbf{s}),\dots,v_n(\mathbf{s}),w_1(\mathbf{s}),\dots,w_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \tag{20}$$

$$w_i(\mathbf{x}) = \int_\Omega G_i(\mathbf{x},\mathbf{s})\,\hat{f}_i(\mathbf{s},w_1(\mathbf{s}),\dots,w_n(\mathbf{s}),v_1(\mathbf{s}),\dots,v_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \tag{21}$$

$$i=1,\dots,n.$$

Рівність $\mathbf{v}^* = \mathbf{w}^*$ буде виконана, якщо система (20), (21) не має на $<\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0>$ таких розв'язків, що $\mathbf{v}\ne\mathbf{w}$.

Отже, має місце така теорема.

Теорема 1. Нехай $<\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0>$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора $\mathbf{T}$ вигляду (7) з супровідним оператором $\hat{\mathbf{T}}$ вигляду (12) і система рівнянь (20), (21) не має на $<\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0>$ розв'язків таких, що $\mathbf{v}\ne\mathbf{w}$. Тоді ітераційний процес (17) – (19) збігається у нормі простору $\mathbf{C}_n(\bar\Omega)$ до єдиного на $<\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0>$ неперервного додатного розв'язку $\mathbf{u}^*$ крайової задачі (1) – (3), причому має місце ланцюг нерівностей

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^{(0)} \leqslant \mathbf{v}^{(1)} \leqslant \dots \leqslant \mathbf{v}^{(k)} \leqslant \dots \leqslant \mathbf{u}^* \leqslant \dots \leqslant \mathbf{w}^{(k)} \leqslant \dots \leqslant \mathbf{w}^{(1)} \leqslant \mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}^0. \tag{22}$$

Теорема 1 може бути уточнена за рахунок використання різних умов, за виконання яких система рівнянь (20), (21) не має на $<\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0>$ розв'язків таких, що $\mathbf{v}\ne\mathbf{w}$.

Нехай існує такий номер i_0, $1\le i_0\le n$, що для будь-яких чисел v_1, …, v_n, w_1, …, w_n, u_1, …, u_n, таких, що $0<v_i<w_i$, $0<u_i<w_i$, $i=1,\dots,n$, і для всіх $\mathbf{x}\in\Omega$ має місце нерівність

$$\hat{f}_{i_0}(\mathbf{x},v_1+u_1,\dots,v_n+u_n,w_1-u_1,\dots,w_1-u_1) < \hat{f}_{i_0}(\mathbf{x},v_1,\dots,v_n,w_1,\dots,w_n) + u_{i_0}M_{i_0}^{-1}, \tag{23}$$

де $M_{i_0} = \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar\Omega} u_0^{i_0}(\mathbf{x})$.

Візьмемо такі вектор-функції $\mathbf{u}=(u_1,\dots,u_n)$ і $\mathbf{w}-\mathbf{v}=(w_1-v_1,\dots,w_n-v_n)$ з $\mathcal{K}_+\setminus\{\theta\}$, що

$$\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{u},\mathbf{w}-\mathbf{u}\in<\mathbf{v}^{(1)},\mathbf{w}^{(1)}>. \tag{24}$$

З умов (24) витікає, що $\mathbf{u}(\mathbf{x})\ge\theta$ на $\bar\Omega$ і $\mathbf{u}|_{\partial\Omega}=\theta$. Тоді, якщо функція $u_{i_0}(\mathbf{x})$ набуває максимального значення у точці $\mathbf{x}_0$, то $\mathbf{x}_0\in\Omega$. Отже, матимемо

$$\int_\Omega G_{i_0}(\mathbf{x}_0,\mathbf{s})\,\hat{f}_{i_0}(\mathbf{x},v_1(\mathbf{s})+u_1(\mathbf{s}),\dots,v_n(\mathbf{s})+u_n(\mathbf{s}),w_1(\mathbf{s})-u_1(\mathbf{s}),\dots,w_n(\mathbf{s})-u_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s} <$$

$$< \int_\Omega G_{i_0}(\mathbf{x}_0,\mathbf{s})[\hat{f}_{i_0}(\mathbf{s},v_1(\mathbf{s}),\dots,v_1(\mathbf{s}),w_1(\mathbf{s}),\dots,w_n(\mathbf{s}))+u_{i_0}(\mathbf{s})M_{i_0}^{-1}]d\mathbf{s} \le$$

$$\le \int_\Omega G_{i_0}(\mathbf{x}_0,\mathbf{s})\,\hat{f}_{i_0}(\mathbf{s},v_1(\mathbf{s}),\dots,v_1(\mathbf{s}),w_1(\mathbf{s}),\dots,w_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s} + M_{i_0}^{-1}\max_{\mathbf{x}\in\bar\Omega}u_{i_0}(\mathbf{x})\int_\Omega G_{i_0}(\mathbf{x}_0,\mathbf{s})d\mathbf{s} \le$$

$$\le \int_\Omega G_{i_0}(\mathbf{x}_0,\mathbf{s})\,\hat{f}_{i_0}(\mathbf{s},v_1(\mathbf{s}),\dots,v_1(\mathbf{s}),w_1(\mathbf{s}),\dots,w_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s} + u_{i_0}(\mathbf{x}_0),$$

тобто

$$\hat{T}_{i_0}(\mathbf{v}+\mathbf{u},\mathbf{w}-\mathbf{u})(\mathbf{x}_0) < \hat{T}_{i_0}(\mathbf{v},\mathbf{w})(\mathbf{x}_0) + u_{i_0}(\mathbf{x}_0),$$

і не може бути виконана нерівність

$$\hat{T}_{i_0}(\mathbf{v}+\mathbf{u},\mathbf{w}-\mathbf{u}) \geqslant \hat{T}_{i_0}(\mathbf{v},\mathbf{w}) + u_{i_0},$$

а тим більше не виконується нерівність

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}+\mathbf{u},\mathbf{w}-\mathbf{u}) \geqslant \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v},\mathbf{w}) + \mathbf{u}.$$

Отже, справджується така теорема.

Теорема 2. Нехай $<\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0>$ — сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора $\mathbf{T}$ вигляду (7) з супровідним оператором $\hat{\mathbf{T}}$ вигляду (12) і має місце умова (23). Тоді ітераційний процес (17) – (19) двобічно збігається у нормі простору $\mathbf{C}_n(\bar{\Omega})$ до єдиного на $<\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0>$ неперервного додатного розв'язку $\mathbf{u}^*$ крайової задачі (1) – (3).

Розглянемо ще одну умову, яка забезпечить рівність $\mathbf{v}^*=\mathbf{w}^*$. Нехай функції $\hat{f}_i(\mathbf{x},v_1,...,v_n,w_1,...,w_n)$, $i=1,...,n$, для всіх чисел v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_n таких, що $0<v_i,w_i<M_0^i$, де $M_0^i=\max\limits_{\mathbf{x}\in\Omega} w_i^0(\mathbf{x})$, $i=1,...,n$, і для всіх $\mathbf{x}\in\Omega$ задовольняють нерівності

$$\left|\hat{f}_i(\mathbf{x},v_1,...,v_n,w_1,...,w_n)-\hat{f}_i(\mathbf{x},w_1,...,w_n,v_1,...,v_n)\right| \le$$

$$\le L_i \max\{|v_1-w_1|,...,|v_n-w_n|\}, \tag{25}$$

де $L_i>0$, $i=1,...,n$.

Тоді

$$\left\|\mathbf{w}^{(k+1)}-\mathbf{v}^{(k+1)}\right\|_n = \left\|\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{w}^{(k)},\mathbf{v}^{(k)})-\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}^{(k)},\mathbf{w}^{(k)})\right\|_n =$$

$$= \max_{i=1,...,n}\max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}[\hat{T}_i(\mathbf{w}^{(k)},\mathbf{v}^{(k)})(\mathbf{x})-\hat{T}_i(\mathbf{v}^{(k)},\mathbf{w}^{(k)})(\mathbf{x})] =$$

$$= \max_{i=1,...,n}\max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}\int_\Omega G_i(\mathbf{x},\mathbf{s})[\hat{f}_i(\mathbf{s},\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{s}),\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{s}))-$$

$$-\hat{f}_i(\mathbf{s},\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{s}),\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{s}))]d\mathbf{s} \le$$

$$\le \max_{i=1,...,n}\left[L_i\max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}\int_\Omega G_i(\mathbf{x},\mathbf{s})d\mathbf{s}\right]\cdot\max_{i=1,...,n}\max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}[w_i^{(k)}(\mathbf{x})-v_i^{(k)}(\mathbf{x})] =$$

$$= \max_{i=1,...,n}\{L_iM_i\}\cdot\left\|\mathbf{w}^{(k)}-\mathbf{v}^{(k)}\right\|_n,$$

де $M_i=\max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}\int_\Omega G_i(\mathbf{x},\mathbf{s})d\mathbf{s}$.

Звідси матимемо, що

$$\left\|\mathbf{w}^{(k+1)}-\mathbf{v}^{(k+1)}\right\|_n \le \gamma^{k+1}\left\|\mathbf{w}^{(0)}-\mathbf{v}^{(0)}\right\|_n,$$

де $\gamma=\max\limits_{i=1,...,n}\{L_iM_i\}$.

Отже, рівність $\mathbf{v}^*=\mathbf{w}^*$ матиме місце, якщо $\gamma=\max\limits_{i=1,...,n}\{L_iM_i\}<1$, і тоді справджується теорема.

Теорема 3. Нехай $<\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0>$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора $\mathbf{T}$ вигляду (7) з супровідним оператором $\hat{\mathbf{T}}$ вигляду (12) і має місце умова (25), причому $\gamma=\max\limits_{i=1,...,n}\{L_iM_i\}<1$, де $M_i=\max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}u_0^i(\mathbf{x})$. Тоді ітераційний процес (17) – (19) двобічно збігається у нормі простору $\mathbf{C}_n(\bar{\Omega})$ до єдиного на $<\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0>$ неперервного додатного розв'язку $\mathbf{u}^*$ крайової задачі (1) – (3).

І нарешті, ще однією умовою того, що система рівнянь (20), (21) не має на сильно інваріантному конусному відрізку $<\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0>$ розв'язків таких, що $\mathbf{v}\neq\mathbf{w}$, є умова $\mathbf{u}_0$-псевдоувігнутості гетеротонного оператора $\mathbf{T}$ вигляду (7) з супровідним оператором $\hat{\mathbf{T}}$ вигляду (12). Тоді з огляду на твердження г) леми 1 приходимо до такого результату.

Теорема 4. Нехай $<\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0>\subset\mathbf{K}(\mathbf{u}_0)$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора $\mathbf{T}$ вигляду (7) з супровідним оператором $\hat{\mathbf{T}}$ вигляду (12) і має місце умова (14). Тоді ітераційний процес (17) – (19) двобічно збігається у нормі простору $\mathbf{C}_n(\bar{\Omega})$ до єдиного на $<\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0>$ неперервного додатного розв'язку $\mathbf{u}^*$ крайової задачі (1) – (3).

На k-й ітерації за наближений розв'язок крайової задачі (1) – (3) приймаємо вектор-функцію

$$\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x})=\frac{1}{2}(\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{x})+\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x})). \tag{26}$$

З огляду на ланцюг нерівностей (22) ми матимемо оцінку похибки для наближеного розв'язку (26):

$$\left\|\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{(k)}\right\|_n \le \frac{1}{2}\max_{i=1,...,n}\max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}(w_i^{(k)}(\mathbf{x})-v_i^{(k)}(\mathbf{x})). \tag{27}$$

Наявність зручної апостеріорної оцінки вигляду (27) є безумовною перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу.

Отже, якщо задана точність $\varepsilon>0$, то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{i=1,...,n}\max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}(w_i^{(k)}(\mathbf{x})-v_i^{(k)}(\mathbf{x}))<2\varepsilon$$

і з точністю ε можна вважати, що $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})\approx\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x})$.

Крім того, за умов теореми 3 можна записати і апріорну оцінку похибки:

$$\left\|\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{(k)}\right\|_n \le \frac{\gamma^k}{2}\max_{i=1,...,n}\max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}(w^0(\mathbf{x})-v^0(\mathbf{x})).$$

Тоді з нерівності

$$\left\|\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{(k)}\right\|_n \le \frac{\gamma^k}{2}\max_{i=1,...,n}\max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}(w^0(\mathbf{x})-v^0(\mathbf{x}))<\varepsilon$$

знаходимо, що для досягнення точності ε треба зробити

$$k_0(\varepsilon)=\left[\frac{\ln\dfrac{\max\limits_{i=1,...,n}\max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}(w_i^0(\mathbf{x})-v_i^0(\mathbf{x}))}{2\varepsilon}}{\ln\dfrac{1}{\max\limits_{i=1,...,n}\{L_iM_i\}}}\right]+1$$

ітерацій, де квадратні дужки позначають цілу частину числа.

Сильно інваріантний конусний відрізок $<\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0>$, який виділяється умовами (15), (16), є апріорною оцінкою невідомого точного розв'язку $\mathbf{u}^*$. Для його побудови можуть бути використані загальні рекомендації, розглянуті у [12].

Оскільки шуканий розв'язок $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ задовольняє умову (3.3) і вектор-функція $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ теж набуває на $\partial\Omega$ нульові значення, то сильно інваріантний конусний відрізок $<\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0>$ можна шукати у вигляді

$$< \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0 > = < \boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\beta}\mathbf{u}_0 > =$$
$$= < (\alpha_1 u_0^1, ..., \alpha_n u_0^n), (\beta_1 u_0^1, ..., \beta_n u_0^n) > ,$$

де $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_n)$, $0 < \alpha_i < \beta_i$, $i = 1, ..., n$. Умови (15), (16) призводять до системі нерівностей

$$\int_\Omega G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}_i(\mathbf{s}, \alpha_1 u_0^1(\mathbf{s}), ..., \alpha_n u_0^n(\mathbf{s}), \beta_1 u_0^1(\mathbf{s}), ..., \beta_n u_0^n(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \geq$$
$$\geq \alpha_i u_0^i(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$
$$\int_\Omega G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}_i(\mathbf{s}, \beta_1 u_0^1(\mathbf{s}), ..., \beta_n u_0^n(\mathbf{s}), \alpha_1 u_0^1(\mathbf{s}), ..., \alpha_n u_0^n(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \leq$$
$$\leq \beta_i u_0^i(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$
$$i = 1, ..., n.$$

Останню систему нерівностей можна привести до вигляду

$$\alpha_i \leq \min_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} h_1^i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \tag{28}$$

$$\beta_i \geq \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} h_2^i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \ i = 1, ..., n, \tag{29}$$

де

$$h_1^i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \int_\Omega \frac{G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0^i(\mathbf{x})} \hat{f}_i(\mathbf{s}, \boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}_0(\mathbf{s}), \boldsymbol{\beta}\mathbf{u}_0(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \ i = 1, ..., n,$$
$$h_2^i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \int_\Omega \frac{G_i(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0^i(\mathbf{x})} \hat{f}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\beta}\mathbf{u}_0(\mathbf{s}), \boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}_0(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \ i = 1, ..., n.$$

Для більш швидкої збіжності ітераційного процесу (17) – (19) величина

$$\max_{i=1,...,n} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})) = \max_{i=1,...,n} \left\{ (\beta_i - \alpha_i) \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_0^i(\mathbf{x}) \right\}$$

має бути якомога меншою, а отже, при практичній реалізації методу двобічних ітерацій для кожного i, $i = 1, ..., n$, слід взяти найбільше α_i і найменше β_i, що задовольняють нерівностям (28), (29).

3. Побудова методу двобічних ітерацій на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова

Розроблений у п. 2 метод двобічних ітерацій розв'язання задачі Діріхле для систем нелінійних еліптичних рівнянь має багато переваг (зокрема, проста обчислювальна схема, зручна апостеріорна оцінка похибки тощо), але його суттєвим недоліком є необхідність знати аналітичний вираз для функції Гріна, що можливо лише для обмеженої кількості еліптичних диференціальних операторів у невеликій кількості областей. Щоб подолати цей недолік розробимо метод двобічних наближень, який базується на використанні квазіфункції Гріна-Рвачова [8].

Нехай $G_{\text{quasi}}^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – квазіфункція Гріна-Рвачова першої крайової задачі для оператора A_i, що задається рівністю

$$A_i u \equiv -\operatorname{div}(p_i(\mathbf{x}) \nabla u) + q_i(\mathbf{x}) u, \ i = 1, ..., n.$$

Областю визначення цих операторів вважатимемо множину функцій D_{A_i}, яка складається з функцій $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ таких, що $u|_{\partial\Omega} = 0$ і $A_i u \in L_2(\Omega)$.

Отже,

$$G_{\text{quasi}}^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = g_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \tilde{g}_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}), \ i = 1, ..., n,$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ у випадку $\mathbb{R}^2$ і $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ у випадку $\mathbb{R}^3$; $g_i(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – фундаментальний розв'язок рівняння $-\operatorname{div}(p_i(\mathbf{x}) \nabla u) + q_i(\mathbf{x}) u = 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$; $\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – симетрична ($\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \tilde{g}_i(\mathbf{s}, \mathbf{x})$) двічі диференційована у $\Omega \times \Omega$ функція така, що $\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = g_i(\mathbf{x}, \mathbf{s})$, якщо $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ чи $\mathbf{s} \in \partial\Omega$.

Тоді, замінюючи кожне з рівнянь системи (1) – (3) еквівалентним інтегральним рівнянням, отримаємо, що задача (1) – (3) еквівалентна системі n інтегральних рівнянь Гаммерштейна

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_\Omega K_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_i(\mathbf{s}) d\mathbf{s} +$$
$$+ \int_\Omega G_{\text{quasi}}^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f_i(\mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), ..., u_n(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \ i = 1, ..., n, \tag{30}$$

де позначено

$$K_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = A_{i,\mathbf{s}} \tilde{g}_i(\mathbf{x}, \mathbf{s});$$
$$A_{i,\mathbf{s}} u \equiv -\operatorname{div}(p_i(\mathbf{s}) \nabla u) + q_i(\mathbf{s}) u.$$

Систему нелінійних інтегральних рівнянь (30) можна також подати у вигляді векторного рівняння Урисона

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_\Omega \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \tag{31}$$

де

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u}(\mathbf{s})) =$$
$$= (P_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), ..., u_n(\mathbf{s})), ..., P_n(\mathbf{x}, \mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), ..., u_n(\mathbf{s}))),$$
$$P_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), ..., u_n(\mathbf{s})) = K_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_i(\mathbf{s}) +$$
$$+ G_{\text{quasi}}^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f_i(\mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), ..., u_n(\mathbf{s}))), \ i = 1, ..., n.$$

Якщо крайова задача (1) – (3) має класичний розв'язок, то він задовольняє також систему рівнянь (30). Якщо ж класичний розв'язок задачі не існує, то систему рівнянь (30) можна використати для введення поняття узагальненого розв'язку крайової задачі (1) – (3).

Систему рівнянь (30) розглядатимемо у банаховому просторі $\mathbf{C}_n(\bar{\Omega})$, напівупорядкованому конусом $\mathcal{K}_+$.

Означення 2. Розв'язком (узагальненим) задачі (1)–(3) називатимемо вектор-функцію $\mathbf{u}^* \in \mathcal{K}_+$, яка є розв'язком системи інтегральних рівнянь (30).

Побудуємо метод двобічних ітерацій знаходження розв'язку системи інтегральних рівнянь (3.30) (а отже, і розв'язку крайової задачі (1) – (3)).

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор $\mathbf{T}$, що діє у $\mathbf{C}_n(\bar{\Omega})$ за правилом, яке визначається правою частиною системи рівнянь (30) (чи (31))

$$\mathbf{T}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \int_\Omega \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u}(\mathbf{s})) d\mathbf{s} =$$
$$= (T_1(\mathbf{u})(\mathbf{x}), ..., T_n(\mathbf{u})(\mathbf{x})), \tag{32}$$

де

$$T_i(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \int_\Omega P_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), ..., u_n(\mathbf{s})) d\mathbf{s} =$$
$$= \int_\Omega K_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_i(\mathbf{s}) d\mathbf{s} +$$
$$+ \int_\Omega G_{\text{quasi}}^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f_i(\mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), ..., u_n(\mathbf{s})) d\mathbf{s}. \tag{33}$$

Оператор $\mathbf{T}$ вигляду (32) можна подати у вигляді суми лінійного інтегрального оператора $\mathbf{T}_1$, що діє у $\mathbf{C}_n(\bar{\Omega})$ за правилом

$$\mathbf{T}_1(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \left(\int_\Omega K_1(\mathbf{x},\mathbf{s})u_1(\mathbf{s})d\mathbf{s}, ..., \int_\Omega K_n(\mathbf{x},\mathbf{s})u_n(\mathbf{s})d\mathbf{s} \right),$$

і нелінійного оператора Гаммерштейна $\mathbf{T}_2$, що діє у $\mathbf{C}_n(\bar{\Omega})$ за правилом

$$\mathbf{T}_2(\mathbf{u})(\mathbf{x}) =$$

$$= \left(\int_\Omega G^1_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\mathbf{s}) f_1(\mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), ..., u_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, ..., \int_\Omega G^n_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\mathbf{s}) f_n(\mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), ..., u_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \right).$$

Завдяки умовам (5) та додатності кожної з квазіфункцій Гріна-Рвачова $G^i_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\mathbf{s})$ при $\mathbf{x},\mathbf{s} \in \Omega$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$), $i = 1,...,n$, можна стверджувати, що оператор $\mathbf{T}_2$ є додатним оператором, бо він залишає інваріантним конус $\mathcal{K}_+$, але через те, що не має впевненості у знаку функцій $K_i(\mathbf{x},\mathbf{s})$ при $\mathbf{x},\mathbf{s} \in \Omega$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$), $i = 1,...,n$, питання про додатність оператора $\mathbf{T}_1$ є відкритим. Отже, ми не можемо стверджувати, що додатним є оператор $\mathbf{T}$. Проте ж оператор $\mathbf{T}$ вигляду (32) можна подати у вигляді різниці додатних операторів.

Для кожного i, $i = 1,...,n$, позначимо

$$K^i_+(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \max\{0, K_i(\mathbf{x},\mathbf{s})\},$$
$$K^i_-(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \max\{0, -K_i(\mathbf{x},\mathbf{s})\}.$$

Зрозуміло, що $K^i_+(\mathbf{x},\mathbf{s}) \geq 0$ і $K^i_-(\mathbf{x},\mathbf{s}) \geq 0$ при $\mathbf{x},\mathbf{s} \in \Omega$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$), $i = 1,...,n$. Тоді

$$K_i(\mathbf{x},\mathbf{s}) = K^i_+(\mathbf{x},\mathbf{s}) - K^i_-(\mathbf{x},\mathbf{s}),$$
$$|K_i(\mathbf{x},\mathbf{s})| = K^i_+(\mathbf{x},\mathbf{s}) + K^i_-(\mathbf{x},\mathbf{s}), \; i = 1,...,n,$$

і оператори T_i, $i = 1,...,n$, вигляду (33) запишуться у так:

$$T_i(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \int_\Omega K^i_+(\mathbf{x},\mathbf{s})u_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_\Omega K^i_-(\mathbf{x},\mathbf{s})u_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_\Omega G^i_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\mathbf{s}) f_i(\mathbf{s}, u_1(\mathbf{s}), ..., u_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s}. \quad (34)$$

Нехай вектор-функція $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})$ дозволяє діагональне подання

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{u}) = (\hat{f}_1(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{u}), ..., \hat{f}_n(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{u})),$$

причому неперервні за сукупністю змінних $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ функції $\hat{f}_i(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \hat{f}_i(\mathbf{x}, v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_n)$ монотонно зростають за всіма v_i і монотонно спадають за всіма w_i, $i = 1, ..., n$, для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$. Тоді оператор $\mathbf{T}$ вигляду (32) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v},\mathbf{w})(\mathbf{x}) = (\hat{T}_1(\mathbf{v},\mathbf{w})(\mathbf{x}), ..., \hat{T}_n(\mathbf{v},\mathbf{w})(\mathbf{x})), \quad (35)$$

де

$$\hat{T}_i(\mathbf{v},\mathbf{w})(\mathbf{x}) = \int_\Omega K^i_+(\mathbf{x},\mathbf{s})v_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_\Omega K^i_-(\mathbf{x},\mathbf{s})w_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_\Omega G^i_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\mathbf{s}) \hat{f}_i(\mathbf{s}, v_1(\mathbf{s}), ..., v_n(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}), ..., w_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s},$$

$$i = 1, ..., n. \quad (36)$$

Зрозуміло, що оператори $\mathbf{T}$ і $\hat{\mathbf{T}}$ є цілком неперервними, а оператор T_i вигляду (34) буде гетеротонним з супровідним оператором $\hat{T}_i$ вигляду (36).

У конусі $\mathcal{K}_+$ виділимо сильно інваріантний конусний відрізок $<\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0>$, $\mathbf{v}^0 = (v^0_1, ..., v^0_n)$, $\mathbf{w}^0 = (w^0_1, ..., w^0_n)$, умовами: для всіх $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\int_\Omega K^i_+(\mathbf{x},\mathbf{s})v^0_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_\Omega K^i_-(\mathbf{x},\mathbf{s})w^0_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_\Omega G^i_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\mathbf{s}) \hat{f}_i(\mathbf{s}, v^0_1(\mathbf{s}), ..., v^0_n(\mathbf{s}), w^0_1(\mathbf{s}), ..., w^0_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \geq v^0_i(\mathbf{x}), \quad (37)$$

$$\int_\Omega K^i_+(\mathbf{x},\mathbf{s})w^0_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_\Omega K^i_-(\mathbf{x},\mathbf{s})v^0_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_\Omega G^i_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\mathbf{s}) \hat{f}_i(\mathbf{s}, w^0_1(\mathbf{s}), ..., w^0_n(\mathbf{s}), v^0_1(\mathbf{s}), ..., v^0_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s} \leq w^0_i(\mathbf{x}), \quad (38)$$

$$i = 1, ..., n.$$

Сформуємо далі ітераційний процес за схемою

$$v^{(k+1)}_i(\mathbf{x}) = \int_\Omega K^i_+(\mathbf{x},\mathbf{s})v^{(k)}_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_\Omega K^i_-(\mathbf{x},\mathbf{s})w^{(k)}_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_\Omega G^i_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\mathbf{s}) \hat{f}_i(\mathbf{s}, v^{(k)}_1(\mathbf{s}), ..., v^{(k)}_n(\mathbf{s}), w^{(k)}_1(\mathbf{s}), ..., w^{(k)}_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \quad (39)$$

$$w^{(k+1)}_i(\mathbf{x}) = \int_\Omega K^i_+(\mathbf{x},\mathbf{s})w^{(k)}_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_\Omega K^i_-(\mathbf{x},\mathbf{s})v^{(k)}_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_\Omega G^i_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\mathbf{s}) \hat{f}_i(\mathbf{s}, w^{(k)}_1(\mathbf{s}), ..., w^{(k)}_n(\mathbf{s}), v^{(k)}_1(\mathbf{s}), ..., v^{(k)}_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \quad (40)$$

$$i = 1, ..., n, \; k = 0, 1, 2, ...;$$

$$v^{(0)}_i(\mathbf{x}) = v^0_i(\mathbf{x}), \; w^{(0)}_i(\mathbf{x}) = w^0_i(\mathbf{x}), \; i = 1, ..., n. \quad (41)$$

Оскільки $<\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0>$ — сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора $\mathbf{T}$ вигляду (32), для якого оператор $\hat{\mathbf{T}}$ вигляду (35) є супровідним, то можна зробити висновок, що послідовність $\{\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x})\}$ не спадає за конусом $\mathcal{K}_+$, а послідовність $\{\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{x})\}$ не зростає за конусом $\mathcal{K}_+$. Тоді через нормальність конуса $\mathcal{K}_+$ і повну неперервність оператора $\hat{\mathbf{T}}$ існують границі $\mathbf{v}^*(\mathbf{x})$ і $\mathbf{w}^*(\mathbf{x})$ цих послідовностей. Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^{(0)} \leqslant \mathbf{v}^{(1)} \leqslant ... \leqslant \mathbf{v}^{(k)} \leqslant ... \leqslant \mathbf{v}^* \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{w}^* \leqslant ... \leqslant \mathbf{w}^{(k)} \leqslant ... \leqslant \mathbf{w}^{(1)} \leqslant \mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}^0.$$

При цьому можливими є два випадки: $\mathbf{v}^* < \mathbf{w}^*$ і $\mathbf{v}^* = \mathbf{w}^*$. У другому випадку $\mathbf{u}^* := \mathbf{v}^* = \mathbf{w}^*$ — єдина на конусному відрізку $<\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0>$ нерухома точка оператора $\mathbf{T}$, а отже, $\mathbf{u}^*$ — єдиний на $<\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0>$ розв'язок крайової задачі (1) — (3).

Вектор-функції $\mathbf{v}^* = (v^*_1, ..., v^*_n)$ і $\mathbf{w}^* = (w^*_1, ..., w^*_n)$ є розв'язком системи з $2n$ нелінійних інтегральних рівнянь вигляду

$$v_i(\mathbf{x}) = \int_\Omega K^i_+(\mathbf{x},\mathbf{s})v_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_\Omega K^i_-(\mathbf{x},\mathbf{s})w_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_\Omega G^i_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\mathbf{s}) \hat{f}_i(\mathbf{s}, v_1(\mathbf{s}), ..., v_n(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}), ..., w_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \quad (42)$$

$$i = 1, ..., n,$$

$$w_i(\mathbf{x}) = \int_\Omega K^i_+(\mathbf{x},\mathbf{s})w_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int_\Omega K^i_-(\mathbf{x},\mathbf{s})v_i(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_\Omega G^i_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\mathbf{s}) \hat{f}_i(\mathbf{s}, w_1(\mathbf{s}), ..., w_n(\mathbf{s}), v_1(\mathbf{s}), ..., v_n(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \quad (43)$$

$$i = 1, ..., n.$$

Умовою виконання рівності $\mathbf{v}^* = \mathbf{w}^*$ буде те, що система (42), (43) не має на $<\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0>$ таких розв'язків, що $\mathbf{v} \ne \mathbf{w}$.

Отже, має місце така теорема.

Теорема 5. Нехай $<\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0>$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора $\mathbf{T}$ вигляду (32) з супровідним оператором $\hat{\mathbf{T}}$ вигляду (35) і система рівнянь (42), (43) не має на $<\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0>$ розв'язків таких, що $\mathbf{v} \ne \mathbf{w}$. Тоді ітераційний процес (39) – (41) збігається у нормі простору $\mathbf{C}_n(\bar{\Omega})$ до єдиного на $<\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0>$ неперервного додатного розв'язку $\mathbf{u}^*$ крайової задачі (1) – (3), причому має місце ланцюг нерівностей

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^{(0)} \leqslant \mathbf{v}^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant \mathbf{v}^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant \mathbf{u}^* \leqslant$$
$$\leqslant \ldots \leqslant \mathbf{w}^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant \mathbf{w}^{(1)} \leqslant \mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}^0 . \qquad (44)$$

Уточнимо теорему 5 за рахунок використання умов, за виконання яких система рівнянь (42), (43) не має на $<\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0>$ розв'язків таких, що $\mathbf{v} \ne \mathbf{w}$.

Теорема 6. Нехай $<\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0>$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора $\mathbf{T}$ вигляду (32) з супровідним оператором $\hat{\mathbf{T}}$ вигляду (35) і має місце умова: існує такий номер i_0, $1 \le i_0 \le n$, що для будь-яких чисел v_1, …, v_n, w_1, …, w_n, u_1, …, u_n, таких, що $0 < v_i < w_i$, $0 < u_i < w_i$, $i = 1, \ldots, n$, і для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ має місце нерівність

$$\hat{f}_{i_0}(\mathbf{x}, v_1 + u_1, \ldots, v_n + u_n, w_1 - u_1, \ldots, w_1 - u_1) <$$
$$< \hat{f}_{i_0}(\mathbf{x}, v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n) + \frac{u_{i_0}}{M_{i_0} + M_{i_0}^1}, \qquad (45)$$

де

$$M_{i_0} = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G_{\text{quasi}}^{i_0}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s},$$

$$M_{i_0}^1 = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} [K_+^{i_0}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K_-^{i_0}(\mathbf{x}, \mathbf{s})] d\mathbf{s}.$$

Тоді ітераційний процес (39) – (41) двобічно збігається у нормі простору $\mathbf{C}_n(\bar{\Omega})$ до єдиного на $<\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0>$ неперервного додатного розв'язку $\mathbf{u}^*$ крайової задачі (1) – (3).

Доведення. Нехай $\mathbf{w} - \mathbf{v} = (w_1 - v_1, \ldots, w_n - v_n)$ і $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ – такі вектор-функції з $\mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$, що

$$\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w} - \mathbf{u} \in <\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{w}^{(1)}>. \qquad (46)$$

Тоді з умов (46) витікає, що $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \ge \theta$ на $\bar{\Omega}$ і $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \theta$. Отже, якщо функція $u_{i_0}(\mathbf{x})$ набуває максимального значення у точці $\mathbf{x}_0$, то $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. Тоді

$$\hat{T}_{i_0}(\mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w} - \mathbf{u})(\mathbf{x}_0) =$$
$$= \int_{\Omega} K_+^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})[v_{i_0}(\mathbf{s}) + u_{i_0}(\mathbf{s})] d\mathbf{s} -$$
$$- \int_{\Omega} K_-^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})[w_{i_0}(\mathbf{s}) - u_{i_0}(\mathbf{s})] d\mathbf{s} +$$
$$+ \int_{\Omega} G_{\text{quasi}}^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) \hat{f}_{i_0}(\mathbf{x}, v_1(\mathbf{s}) + u_1(\mathbf{s}), \ldots, v_n(\mathbf{s}) + u_n(\mathbf{s}),$$
$$w_1(\mathbf{s}) - u_1(\mathbf{s}), \ldots, w_n(\mathbf{s}) - u_n(\mathbf{s})) d\mathbf{s} <$$
$$< \int_{\Omega} K_+^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) v_{i_0}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) w_{i_0}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} +$$
$$+ \int_{\Omega} [K_+^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) + K_-^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})] u_{i_0}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} +$$
$$+ \int_{\Omega} G_{\text{quasi}}^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) \Bigg[\hat{f}_{i_0}(\mathbf{s}, v_1(\mathbf{s}), \ldots, v_1(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}), \ldots, w_n(\mathbf{s})) +$$
$$+ \frac{u_{i_0}(\mathbf{s})}{M_{i_0} + M_{i_0}^1} \Bigg] d\mathbf{s} \le$$
$$\le \int_{\Omega} K_+^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) v_{i_0}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) w_{i_0}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} +$$
$$+ \int_{\Omega} G_{\text{quasi}}^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) \hat{f}_{i_0}(\mathbf{s}, v_1(\mathbf{s}), \ldots, v_1(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}), \ldots, w_n(\mathbf{s})) d\mathbf{s} +$$
$$+ \frac{1}{M_{i_0} + M_{i_0}^1} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_{i_0}(\mathbf{x}) \Bigg[\int_{\Omega} [K_+^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) + K_-^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})] d\mathbf{s} +$$
$$+ \int_{\Omega} G_{\text{quasi}}^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \Bigg] \le$$
$$\le \int_{\Omega} K_+^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) v_{i_0}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) w_{i_0}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} +$$
$$+ \int_{\Omega} G_{\text{quasi}}^{i_0}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}) \hat{f}_{i_0}(\mathbf{s}, v_1(\mathbf{s}), \ldots, v_1(\mathbf{s}), w_1(\mathbf{s}), \ldots, w_n(\mathbf{s})) d\mathbf{s} +$$
$$+ u_{i_0}(\mathbf{x}_0) = \hat{T}_{i_0}(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{x}_0) + u_{i_0}(\mathbf{x}_0).$$

Звідси випливає, що для оператора $\hat{\mathbf{T}}$ не може бути виконана нерівність $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w} - \mathbf{u}) \geqslant \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathbf{u}$. Отже, система рівнянь (42), (43) не має на $<\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0>$ розв'язків таких, що $\mathbf{v} \ne \mathbf{w}$, і справджуватиметься теорема 5. Теорема 6 доведена.

Використаємо тепер ще одну умову, яка теж забезпечить рівність $\mathbf{v}^* = \mathbf{w}^*$. Нехай для кожного i, $i = 1, \ldots, n$, існує таке число $L_i > 0$, що функція $\hat{f}_i(\mathbf{x}, v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n)$ для всіх чисел v_1, …, v_n, w_1, …, w_n таких, що $0 < v_i, w_i < M_0^i$, де $M_0^i = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} w_i^0(\mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, n$, і для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ задовольняє нерівність

$$\left| \hat{f}_i(\mathbf{x}, v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n) - \hat{f}_i(\mathbf{x}, w_1, \ldots, w_n, v_1, \ldots, v_n) \right| \le$$
$$\le L_i \max\{|v_1 - w_1|, \ldots, |v_n - w_n|\}, \qquad (47)$$

Розглянемо різницю $w_i^{(k+1)}(\mathbf{x}) - v_i^{(k+1)}(\mathbf{x})$:

$$w_i^{(k+1)}(\mathbf{x}) - v_i^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \hat{T}_i(\mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{v}^{(k)})(\mathbf{x}) - \hat{T}_i(\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k)})(\mathbf{x}) =$$
$$= \int_{\Omega} [K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s})][w_i^{(k)}(\mathbf{s}) - v_i^{(k)}(\mathbf{s})] d\mathbf{s} +$$
$$+ \int_{\Omega} G_{\text{quasi}}^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})[\hat{f}_i(\mathbf{s}, w_1^{(k)}(\mathbf{s}), \ldots, w_n^{(k)}(\mathbf{s}), v_1^{(k)}(\mathbf{s}), \ldots, v_n^{(k)}(\mathbf{s})) -$$
$$- \hat{f}_i(\mathbf{s}, v_1^{(k)}(\mathbf{s}), \ldots, v_n^{(k)}(\mathbf{s}), w_1^{(k)}(\mathbf{s}), \ldots, w_n^{(k)}(\mathbf{s}))] d\mathbf{s}.$$

Тоді з урахуванням нерівності (47) отримаємо оцінку

$$\left\| \mathbf{w}^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k+1)} \right\|_n = \max_{i=1,\ldots,n} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} [w_i^{(k+1)}(\mathbf{x}) - v_i^{(k+1)}(\mathbf{x})] \le$$
$$\le \max_{i=1,\ldots,n} \Bigg\{ \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} [K_+^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K_-^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})][w_i^{(k)}(\mathbf{s}) - v_i^{(k)}(\mathbf{s})] d\mathbf{s} +$$
$$+ \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G_{\text{quasi}}^i(\mathbf{x}, \mathbf{s})[\hat{f}_i(\mathbf{s}, w_1^{(k)}(\mathbf{s}), \ldots, w_n^{(k)}(\mathbf{s}), v_1^{(k)}(\mathbf{s}), \ldots, v_n^{(k)}(\mathbf{s})) -$$
$$- \hat{f}_i(\mathbf{s}, v_1^{(k)}(\mathbf{s}), \ldots, v_n^{(k)}(\mathbf{s}), w_1^{(k)}(\mathbf{s}), \ldots, w_n^{(k)}(\mathbf{s}))] d\mathbf{s} \Bigg\} \le$$
$$\le \max_{i=1,\ldots,n} \{M_1^i + L_i M_i\} \cdot \max_{i=1,\ldots,n} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} [w_i^{(k)}(\mathbf{x}) - v_i^{(k)}(\mathbf{x})] =$$
$$= \max_{i=1,\ldots,n} \{M_1^i + L_i M_i\} \left\| \mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{v}^{(k)} \right\|_n,$$

де

$$M_i = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G_{\text{quasi}}^i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}, \qquad (48)$$

$$M_i^1 = \max_{\mathbf{x}\in\bar\Omega} \int_\Omega [K_+^i(\mathbf{x},\mathbf{s}) + K_-^i(\mathbf{x},\mathbf{s})]d\mathbf{s}\,,\ i=1,\dots,n\,. \quad (49)$$

Звідси матимемо, що

$$\left\|\mathbf{w}^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k+1)}\right\|_n \le \gamma^{k+1}\left\|\mathbf{w}^{(0)} - \mathbf{v}^{(0)}\right\|_n,$$

де $\gamma = \max_{i=1,\dots,n}\{M_1^i + L_i M_i\}$.

Отже, рівність $\mathbf{v}^* = \mathbf{w}^*$ матиме місце, якщо $\gamma = \max_{i=1,\dots,n}\{M_1^i + L_i M_i\} < 1$, і справджується така теорема.

Теорема 7. Нехай $<\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0>$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора $\mathbf{T}$ вигляду (32) з супровідним оператором $\hat{\mathbf{T}}$ вигляду (35) і має місце умова (47), причому $\gamma = \max_{i=1,\dots,n}\{M_1^i + L_i M_i\} < 1$, де сталі M_i і M_1^i, $i=1,\dots,n$, визначаються рівностями (48) і (49) відповідно. Тоді ітераційний процес (39) – (41) двобічно збігається у нормі простору $\mathbf{C}_n(\bar\Omega)$ до єдиного на $<\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0>$ неперервного додатного розв'язку $\mathbf{u}^*$ крайової задачі (1) – (3).

Зауважимо, що не всі умови збіжності методу двобічних ітерацій з п. 2 переносяться на випадок системи рівнянь (30). Оскільки для кожного i, $i=1,\dots,n$, різниця

$$\hat{T}_i\left(\tau\mathbf{v}, \frac{1}{\tau}\mathbf{w}\right)(\mathbf{x}) - \tau \hat{T}_i(\mathbf{v},\mathbf{w})(\mathbf{x}) = \left(\tau - \frac{1}{\tau}\right)\int_\Omega K_-^i(\mathbf{x},\mathbf{s}) w_i(\mathbf{s}) d\mathbf{s} +$$

$$+\int_\Omega G_{\text{quasi}}^i(\mathbf{x},\mathbf{s})\left[\hat{f}_i\left(\mathbf{s}, \tau\mathbf{v}(\mathbf{s}), \frac{1}{\tau}\mathbf{w}(\mathbf{s})\right) - \tau\hat{f}_i(\mathbf{s},\mathbf{v}(\mathbf{s}),\mathbf{w}(\mathbf{s}))\right]d\mathbf{s}$$

для τ близьких до нуля може приймати як завгодно великі за модулем від'ємні значення незалежно від знаку виразу у квадратних дужках під другим інтегралом, то гетеротонний оператор $\mathbf{T}$ вигляду (32) з супровідним оператором $\hat{\mathbf{T}}$ вигляду (35) не буде навіть псевдоувігнутим.

Як і у методі двобічних ітерацій на основі використання функції Гріна, якщо виконано k-й ітерації, то за наближений розв'язок крайової задачі (1) – (3) слід взяти вектор-функцію (26). Тоді для похибки для наближеного розв'язку $\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x})$ ми матимемо апостеріорну оцінку вигляду (27).

Якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{i=1,\dots,n}\max_{\mathbf{x}\in\bar\Omega}(w_i^{(k)}(\mathbf{x}) - v_i^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon$$

і тоді з точністю ε можна вважати, що $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x})$.

Якщо ж виконуються умови теореми 7, то матиме місце і апріорна оцінка похибки:

$$\left\|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{(k)}\right\|_n \le \frac{\gamma^k}{2}\max_{i=1,\dots,n}\max_{\mathbf{x}\in\bar\Omega}(w_i^0(\mathbf{x}) - v_i^0(\mathbf{x}))\,,$$

з якої знаходимо, що для досягнення точності ε треба зробити

$$k_0(\varepsilon) = \left[\frac{\ln \dfrac{\max_{i=1,\dots,n}\max_{\mathbf{x}\in\bar\Omega}(w_i^0(\mathbf{x}) - v_i^0(\mathbf{x}))}{2\varepsilon}}{\ln \dfrac{1}{\max_{i=1,\dots,n}\{M_1^i + L_i M_i\}}}\right] + 1$$

ітерацій, де квадратні дужки позначають цілу частину числа.

Сильно інваріантний конусний відрізок $<\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0>$, який виділяється умовами (37), (38), є апріорною оцінкою невідомого точного розв'язку $\mathbf{u}^*$. Для його побудови можуть бути використані загальні рекомендації, розглянуті у п. 2 і у [12].

Висновки

В роботі вперше проведене дослідження можливості побудови двобічних наближень до додатного розв'язку першої крайової задачі для системи нелінійних еліптичних рівнянь (1). При цьому розглянуто два підходи: один – на основі використання точної функції Гріна розглядуваної задачі, а другий – на основі використання квазіфункції Гріна-Рвачова. Отримано умови існування додатного розв'язку та умови двобічної збіжності до нього методу ітерацій. Отримані результати можуть бути використані у математичному моделюванні різноманітних стаціонарних нелінійних процесів у науці та техніці. Це і визначає наукову новизну та практичну значимість отриманих у роботі результатів.

Список літератури: **1.** *Pao C.V.* Nonlinear parabolic and elliptic equations / C. V. Pao. – New York: Plenum Press, 1992. **2.** *Cui R.* Uniqueness of the positive solution for a class of semilinear elliptic systems / R. Cui, Y. Wang, J. Shi // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 2007. – Vol. 67. – № 6. – P. 1710–1714. **3.** *Dalmasso R.* Existence and uniqueness of positive radial solutions for the Lane–Emden system / R. Dalmasso // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 2004. – Vol. 57. – № 3. – P. 341 – 348. **4.** *Korman P.* On Lane-Emden type systems / P. Korman, J. Shi // Discrete Contin. Dyn. Syst. – 2005. – P. 510–517. **5.** *Li C.* A degree theory framework for semilinear elliptic systems / C. Li, J. Villavert // Proceedings of the American Mathematical Society. – 2016. – Vol. 144. – № 9. – P. 3731–3740. **6.** *Maniwa M.* Uniqueness and existence of positive solutions for some semilinear elliptic systems / M. Maniwa // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 2004. – Vol. 59. – № 6. – P. 993–999. **7.** *Опойцев В.И.* Нелинейные операторы в пространствах с конусом / В.И. Опойцев, Т.А. Хуродзе. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. – 246 с. **8.** *Сидоров М.В.* Застосування методів функцій Гріна та квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних ітераційних процесів розв'язання нелінійних крайових задач / М.В. Сидоров // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2017. – № 2. – С. 250–259. **9.** *Колосова С.В.* О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена / С.В. Колосова, В.С. Луханин, М.В. Сидоров // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2015. – № 3. – С. 107–120. **10.** *Sidorov M.V.* Construction of two-sided approximations to positive solutions of boundary value problems for semilinear elliptic systems / M.V. Sidorov // Journal of Numerical & Applied Mathematics. – 2017. – № 3 (126). – P. 110–123. **11.** *Sidorov M.V.* Method of two-sided approximations for finding positive solutions of boundary value problems for semilinear elliptic systems: the use of the Green-Rvachev's quasi-function / M.V. Sidorov // Journal of Numerical & Applied Mathematics. – 2018. – № 2 (128). – P. 96–113. **12.** *Сидоров М.В.* Застосування конструктивних методів теорії R-функцій для побудови конусного відрізка при чисельній реалізації двобічних ітераційних методів / М.В. Сидоров // Бионика интеллекта: научн.-техн. журнал. – 2017. – № 2 (89). – С. 43–49.

Надійшла до редколегії 25.04.2018