

УДК 004.852

О.Г. Руденко<sup>1</sup>, О.О. Безсонов<sup>2</sup>, О. Г. Лебедєв<sup>3</sup>, О. С. Романюк<sup>4</sup><sup>1</sup> ХНЕУ, м. Харків, Україна, oleg.rudenko@hneu.net;<sup>2</sup> ХНЕУ, м. Харків, Україна, oleksandr.bezsonov@hneu.net;<sup>3</sup> ХНУРЕ, м. Харків, Україна, oleg.lebediev@nure.ua;<sup>4</sup> ХНУРЕ, м. Харків, Україна, romanyk@gmail.com

## КРИТЕРІЇ ВИБОРУ ПЕРСЕПТРОННОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ: АНАЛІЗ І ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ЇХ ВИКОРИСТАННЯ

Аналізуються існуючі і досить поширені статистичні (RMSE, MAPE, MAE та інші) і деякі інформаційні критерії (AIC, KIC, HQ тощо) (метрики) вибору персептронної моделі для прогнозування часових рядів, аналізуються переваги та недоліки цих критеріїв. Крім того, розглядаються запропоновані останнім часом нові критерії, які ще не набули широкого поширення, однак, є такими, що володіють, на думку авторів, істотними перевагами. До числа таких критеріїв належать критерій точності напрямку та його модифікація, спрямована симетрія та її модифікація, зважений інформаційний критерій та його адаптивна модифікація.

Розглянуті критерії вибору моделі аналізуються для прогнозування об'єму пасажиропотоку у аеропортах Німеччини. Отримані результати свідчать про те, що критерії вибору моделі на основі медіани прогнозів мають меншу мінливість, ніж інші, в той час як критерії, що базуються на геометричному середньому, мають більшу мінливість.

**ПЕРСЕПТРОННА МОДЕЛЬ, ЧАСОВИЙ РЯД, КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ, ПОМИЛКА ПРОГНОЗУ, НЕСТАЦІОНАРНІСТЬ, СПРЯМОВАНА СИМЕТРІЯ, СИМЕТРИЧНИЙ КРИТЕРІЙ**

**Руденко О.Г., Безсонов А.А., Лебедєв О.Г., Романюк А.С. Критерии выбора персептронной модели для прогнозирования: анализ и практические рекомендации по их использованию.** Анализируются существующие и достаточно распространенные статистические (RMSE, MAPE, MAE и другие) и некоторые информационные критерии (AIC, KIC, HQ и т.п.) (метрики) выбора персептронной модели для прогнозирования, анализируются преимущества и недостатки этих критериев. Кроме того, рассматриваются предложенные в последнее время новые критерии, еще не получившие широкого распространения, однако, обладающие, по мнению авторов, существенными достоинствами. К числу таких критериев относятся критерий точности направления и его модификация, направленная симметрия и ее модификация, взвешенный информационный критерий и его адаптивная модификация.

Рассмотренные критерии выбора модели анализируются для прогнозирования объема пассажиропотока в аэропортах Германии. Полученные результаты свидетельствуют о том, что критерии выбора модели на основе медианы прогнозов имеют меньшую изменчивость, чем другие, в то время как критерии, основанные на геометрическом среднем, имеют большую изменчивость.

**ПЕРСЕПТРОННАЯ МОДЕЛЬ, ВРЕМЕННОЙ РЯД, КРИТЕРИЙ ОЦЕНИВАНИЯ, ОШИБКА ПРОГНОЗА, НЕСТАЦИОНАРНОСТЬ, НАПРАВЛЕННАЯ СИММЕТРИЯ, СИММЕТРИЧНИЙ КРИТЕРИЙ**

**Rudenko O.G., Bezsonov O.O., Lebediev O.G., Romanyk O.S. Criterias for the selection of the perseptronic model for forecasting: analysys and practical recomendations regarding their usage.** Existing and common statistical (RMSE, MAPE, MAE and others) and some information criteria (AIC, KIC, HQ, etc.) for selecting a perceptron model for forecasting are analyzed. Advantages and disadvantages of these criteria are discussed. In addition, the recently proposed new criteria, which have not yet become widespread, but which, according to the authors, have significant advantages are considered. Such criteria include direction accuracy criterion and its modification, directional symmetry and its modification, weighted information criterion and its adaptive modification.

The considered model selection criteria are utilized for prediction the volume of passenger traffic at airports in Germany. The results suggest that the criteria for selecting a model based on the median of the forecasts have less variability than others, while the criteria based on the geometric mean have greater variability.

**PERSEPTRONIC MODEL, TIME SERIES, EVALUATION CRITERIA, FORECAST ERROR, NON-STATIONARITY, DIRECTED SYMMETRY, SYMMETRIC CRITERIA**

### Вступ

Прогнозування часових рядів (ЧР) є важливою науково-технічною проблемою, яка дозволяє передбачити поведінку різних факторів в екологічних, економічних, соціальних та інших системах. Актуальність задачі прогнозування ЧР особливо зростає останнім часом. Це обумовлено доступністю потужних обчислювальних засобів збору та обробки інформації [1–7].

Метою будь-якого прогнозування є створення моделі, яка дозволяє передбачити майбутнє і оцінити тенденції в змінах того чи іншого фактора. Якість прогнозу в такому випадку залежить від наявності передісторії змінюваного чинника, похибок вимірювання даної величини і інших чинників. Для оцінки якості прогнозування використовуються різні критерії: оцінки помилок прогнозування, швидкість розрахунку, інтерпретованість тощо.

Оцінка помилки прогнозування або точності прогнозу є найбільш важливими при вирішенні практичних завдань.

Слід зазначити, що жорсткі статистичні припущення про властивості часових рядів часто обмежують можливості класичних методів прогнозування. Застосування методів обчислювального інтелекту, зокрема штучних нейронних мереж (ШНМ) в даній задачі обумовлено наявністю в більшості ЧР складних закономірностей, апіорної та поточної невизначеності, нестаціонарностей, викидів тощо [7–12].

Інтелектуальні методи прогнозування, як і класичні, потребують побудови математичної моделі, якість якої і обумовлює точність прогнозування. Необхідно зазначити, що при цьому для побудови моделі (вибору її структури та оцінці параметрів) використовуються ті ж критерії, які характеризують точність прогнозування [13–15].

При дослідженні ЧР отримати абсолютно точний прогноз майже неможливо, з цієї причини важливим завданням вважається оцінка різних моделей прогнозування з точки зору певних критеріїв якості. При цьому надійність обраної моделі прогнозування оцінюється періодичним порівнянням фактичних і прогнозованих значень ряду. При вирішенні практичних задач більш значущими вважається аналіз помилки прогнозування або точності прогнозу [16].

Як вже зазначалося, абсолютну точність прогнозу оцінювати не прийнято, тому що для кожного конкретного завдання вона може кардинально відрізнитися, тому оцінюють саме помилку прогнозу, яка характеризується деякою метрикою.

З урахуванням цих труднощів і помилок в прогнозах, виникає необхідність розробки рекомендацій щодо вибору критеріїв оцінки якості прогнозування, зроблених на підставі та розрахунку помилок прогнозування.

Метою роботи є аналіз існуючих і досить поширених оцінок структури нейромережевої моделі і помилок (метрик) прогнозування та розробка рекомендацій щодо їх використання.

### 1. Багатошаровий перцептрон (БП)

БП представляє собою нейронну мережу з декількома шарами, кожен з яких складається з комп'ютерних вузлів (нейронів) [17–18]. Топологія багатошарового перцептрона показана на рис. 1. Входи мережі підключені до кожного нейрона в першому шарі. Виходи нейронів першого шару потім становляться входами для нейронів другого шару і так далі. Останній шар є вихідним, всі інші шари між вхідними та вихідними шарами називаються прихованими. Архітектура БП може бути

зручно записана як  $n_0 - n_1 - \dots - n_l$ , де  $n_0$  є розмір вхідного вектора мережі, а  $n_i$ ,  $1 \leq i \leq l$  позначає номери вузлів у відповідних шарах. Таким чином, БП використовує наступну апроксимацію нелінійного оператора:

$$\hat{y}(x) = \hat{f}(x) = f^q \left[ (W^q)^T f^{q-1} \left[ (W^{q-1})^T f^{q-2} \left[ \dots f^1 \left[ (W^1 x + b_1)^T \right] \dots \right] \right] \right] + b_q, \quad (1)$$

де  $W^i$  — вектор вагових параметрів нейронів  $i$ -го шару мережі;  $f^i[\cdot]$  — активаційна функція (АФ)  $i$ -го шару,  $b_i$  — зміщення  $i$ -го нейрону.

При використанні ШНМ, як і при традиційному підході, також виникають задачі структурної та параметричної оптимізації, відповідні вибору оптимальної топології мережі і її навчання (налаштування параметрів). Якщо завдання визначення структури є дискретною оптимізаційною (комбінаторною), то пошук оптимальних параметрів здійснюється в безперервному просторі за допомогою класичних методів оптимізації.

Традиційні методи визначення структури мережі полягають або в послідовному її ускладненні шляхом введення нових нейронів і нових зв'язків між ними, або в послідовному її спрощенні, починаючи з деякої досить складної топології.

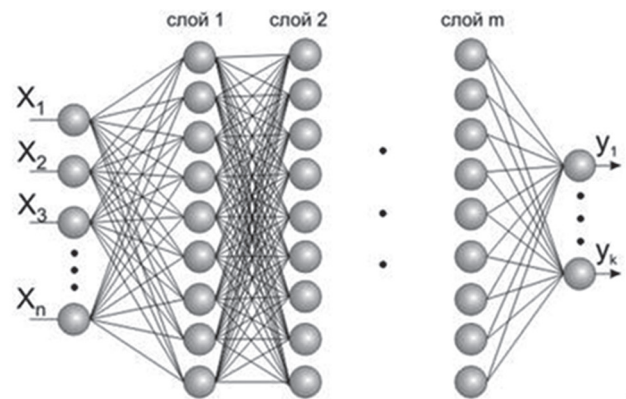


Рис. 1. Топологія багатошарового перцептрона

Навчання мережі полягає у визначенні вектора її параметрів розміру  $q \times 1$  і зводиться до мінімізації деякого функціоналу (критерія навчання) від помилок

$$J = e^2(k) = M \left\{ \left[ y(k) - \hat{y}(k) \right]^2 \right\} \quad (2)$$

де  $y(k)$  — реальна змінна, що прогнозується;  $\hat{y}(k)$  — вихідний сигнал мережі.

Більшість відомих в даний час алгоритмів навчання нейронних мереж заснована на використанні жорстких і важко перевірених умов, пов'язаних з гіпотезою нормальності закону розподілу завдань і обґрунтованих посиленнями на

центральною граничною теоремою, і представляє деякі модифікації методу найменших квадратів (МНК).

Задача структурної оптимізації є більш складною і її рішення повинне задовольняти деякому/ деяким критеріям. У зв'язку з тим, що визначення найкращої архітектури ШНМ є надто важливим для рішення поставленої задачі, а на цей час не існує загальних рекомендацій щодо вибору архітектури мережі, слід розглянути існуючі критерії оцінки ефективності та виявити їх переваги та недоліки.

## 2. Критерії, засновані на абсолютних помилках

*Середня помилка прогнозу (Mean Forecast Error, MFE):*

$$MFE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i. \quad (3)$$

*Середня абсолютна помилка (Mean Absolute Error, MAE):*

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |e_i| = \text{mean} |e_i| \quad (4)$$

визначає величину помилки прогнозу в цілому.

Як і MFE, дана метрика також залежить від шкали вимірювання і використання перетворень вихідних даних.

У метрики MAE є два недоліки, які проявляються тільки в разі аналізу прогнозу точності моделі:

- 1) її значення важко інтерпретувати;
- 2) за допомогою цієї метрики можна проводити порівняння тільки між моделями з одного ряду даних. На практиці ж часто стоїть завдання зрозуміти, як себе веде модель з кількох рядів даних в порівнянні з іншими моделями. Однак отримані з різних рядів значення MAE складати один з одним не можна.

*Середня квадратична помилка (Mean Squared Error, MSE):*

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2. \quad (5)$$

Дана метрика враховує наявність рідкісних екстремальних помилок.

*Залишкова квадратична помилка (Residual Sum of Squares, RSS, Sum of Squared Error, SSE):*

$$RSS = SSE = \sum_{i=1}^N e_i^2. \quad (6)$$

Дана метрика має схожі з MSE характеристики.

*Знакова середня квадратична помилка (Signed Mean Squared Error, SMSE):*

$$SMSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{e_i}{|e_i|} \right) e_i^2. \quad (7)$$

Дана метрика залежить від шкали вимірювання і перетворень вхідних даних і нормалізує отримане значення MSE.

*Root Mean Squared Error, RMSE:*

$$RMSE = \sqrt{MSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2}. \quad (8)$$

Дана метрика має схожі з MSE характеристики.

*Корінь четвертого ступеня помилки в четвертому ступені (Fourth Root Mean Quadrupled Error, FRMQE, R4MS4E) [19]:*

$$FRMQE = R4MS4E = \sqrt[4]{\sum_{i=1}^N e_i^4}. \quad (9)$$

*Нормалізована середня квадратична помилка (Normalized Mean Squared Error, NMSE):*

$$NMSE = \frac{MSE}{\sigma^2} = \frac{1}{N\sigma^2} \sum_{i=1}^N e_i^2, \quad (10)$$

де  $\sigma$  — дисперсія прогнозу.

Дана метрика нормалізує отримане значення MSE.

*Медіанна абсолютна помилка (Median Absolute Error, MdAE):*

$$MdAE = \text{median} |e_i|_{i=1,N} \quad (11)$$

*Стандартне відхилення (Standard deviation, SD):*

$$SD = \sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{(y_i - ME)^2}{N}}. \quad (12)$$

Абсолютні вимірювання помилок мають наступні недоліки:

- 1) залежність від масштабу [4] (тому якщо задача прогнозу включає в себе об'єкти з різними масштабами або величинами, абсолютна помилка в якості метрики не може застосовуватися);
- 2) високий вплив викидів в даних на оцінку ефективності прогнозу [19, 20] (тому якщо дані містять викиди, то абсолютні значення помилок є неефективними).

RMSE, MSE мають низьку надійність (робастність): результати можуть бути різними залежно від різної частки даних [14].

## 3. Критерії, засновані на обчисленні процентних відношень

*Середня абсолютна процентна помилка (Mean Absolute Percentage Error, MAPE):*

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{e_i}{y_i} \right| \times 100. \quad (13)$$

Як видно, MAPE не має розмірності, з дуже простою інтерпретацією. Її можна вимірювати в частках або відсотках, легко складати з різних рядів. Можна навіть розрахувати MAPE і вивчити його розподіл, використовуючи інструменти статистичного аналізу.

Дана метрика застосовується для часових рядів, фактичні значення яких значно більше 1

(наприклад, оцінки помилки прогнозування енергоспоживання майже у всіх статтях наводяться як значення MAPE). Ця метрика по-різному ставиться до позитивних і негативних помилок: жорсткіше до випадків завищених прогнозів, ніж занижених. У випадку з агрегуванням прогнозів по різних значеннях це призводить до викривлення – дослідник не отримує достовірної інформації про якість його прогнозу.

В результаті детального порівняння MAPE з іншими метриками при виборі моделі прогнозування в роботі [21] показано, що MAPE є ненадійним критерієм при використанні цієї метрики для вибору між конкуруючими прогнозними моделями. Зокрема, існує висока ймовірність того, що MAPE вибере модель, яка дає оцінку нижче середнього (тобто «недооцінює») моделі, що прогнозує середнє значення.

Аналогічний результат отримано в [22], де показано, що MAPE систематично і послідовно високо оцінює моделі, які дають занадто оптимістичний прогноз. Через поділ на фактичні значення ця метрика виявилася чутливою до масштабу, і при малому значенні фактичного у значення MAPE може бути дуже великим.

Середня абсолютна відсоткова помилка типу арктангенс (Mean Arctangent Absolute Percentage Error (MAAPE) [23, 24]:

$$MAAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N AAPE_i, \quad (14)$$

$$\text{де } AAPE_i = \arctg\left(\left|\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}\right|\right).$$

Ця метрика дозволяє дещо поліпшити властивості MAPE.

Середня процентна помилка (Mean Percentage Error, MPE):

$$MPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{e_i}{y_i}\right) \times 100 \quad (15)$$

покликана оцінювати не точність прогнозу, а його зміщення.

Можна помітити, що вона схожа на MAPE, має ті ж перевагами і недоліками, що і MAPE, але відрізняється лише відсутністю модулів в чисельнику. MPE показує відсоток зсуву прогнозу. Позитивні значення цього критерію вказують на систематичне заниження прогнозу, а негативні – на завищення. Значення MPE так само, як і MAPE може варіюватися у відсотках.

Дана метрика є досить хорошим показником повної помилки прогнозу, але вона не настільки інтуїтивно зрозуміла, на відміну від інших метрик.

Медіанна абсолютна процентна помилка (Median Absolute Percentage Error, MdAPE):

$$MdAPE = \text{median}_{i=1,N} |\bar{e}_i|, \quad (16)$$

де  $\bar{e}_i = e_i / y_i$ .

Квадратний корінь середньоквадратичної процентної помилки (Root Median Square Percentage Error, RMSPE):

$$RMSPE = \sqrt{\text{mean}_{i=1,N}(\bar{e}_i)^2} \quad (17)$$

Квадратний корінь медіанної процентної помилки (Root Median Square Percentage Error, RMSPE):

$$RMdSPE = \sqrt{\text{median}_{i=1,N}(\bar{e}_i)^2}. \quad (18)$$

Для даної групи критеріїв характерними є наступні недоліки:

1) з'являється поділ на нуль, коли фактичне значення дорівнює нулю;

2) несиметричність – значення помилки відрізняються, якщо прогнозоване значення більше або менше фактичного [16, 17];

3) викиди значно впливають на результат, особливо, якщо відхилення має значно більшу величину, ніж максимальне значення «нормальних» випадків [15];

4) обчислення помилки є необ'єктивним, що може призвести до неправильної оцінки моделі прогнозування [21].

#### 4. Симетричні критерії

Симетрична MAPE (Symmetric MAPE, SMAPE):

$$SMAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{2|e_i|}{|y_i| + |\hat{y}_i|} \quad (19)$$

використовує середнє арифметичне фактичного і прогнозованого значень, застосовується для часових рядів, фактичні значення яких значно більше 1.

Незважаючи на те, що метрика повинна бути симетричною, але такою вона до кінця не є. SMAPE демонструє зміщення тільки цього разу в бік завищених прогнозів: завищені прогнози призводять до меншої помилки, ніж занижені.

Симетрична медіанна APE (Symmetric Median APE, SMdAPE):

$$SMdAPE = \text{median}_{i=1,N} \frac{|y_i - \hat{y}_i|}{|y_i + \hat{y}_i|}. \quad (20)$$

Модифікована MAPE (Modified sMAPE, msMAPE):

$$msMAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|y_i - \hat{y}_i|}{\frac{|y_i| + |\hat{y}_i|}{2} + s_i}, \quad (21)$$

$$\text{де } s_i = \frac{1}{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} |y_i - \bar{y}_k|, \bar{y}_k = \frac{1}{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} y_k.$$



Дана група критеріїв має такі недоліки:

- 1) незважаючи на назву, вони є несиметричними [18];
- 2) якщо фактичне значення дорівнює прогнозованому, але з протилежним знаком, або обидва ці значення дорівнюють нулю, тоді відбувається поділ на нуль;
- 3) на значення критеріїв суттєво впливають викиди аналогічно з відсотковими помилками;
- 4) існує проблема інтерпретації результатів.

### 5. Відносні критерії

Середня відносна абсолютна помилка (*Mean Relative Absolute Error, MRAE*):

$$MRAE = \text{mean} \frac{|e_i|}{(y_i - \hat{y}_i^*)}, \quad (22)$$

де  $\hat{y}_i^*$  – прогнозна величина базової (еталонної) моделі (на практиці, як правило, обирають  $\hat{y}_i^* = y_{i-1}$ ).

Медіанна відносна абсолютна помилка (*Median Relative Absolute Error, MdRAE*):

$$MdRAE = \text{median}_{i=1, N} \left| \frac{|e_i|}{(y_i - \hat{y}_i^*)} \right|. \quad (23)$$

Геометрична середня відносна помилка (*Geometric Mean Relative Absolute Error, GMRAE*) [25, 26]:

$$GMRAE = \sqrt[m]{\prod_{i=1}^m \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i - \tilde{y}_i} \right|} \quad (24)$$

де  $y_i - \tilde{y}_i$  – помилка за деякою другою моделлю.

GMRAE показує, у скільки разів побудована модель виявилася гірше (або краще) за обрану для порівняння (модель-бенчмарк). Якщо GMRAE > 1, то обрана модель виявилася менш точною, в протилежній ситуації – більш точною. Однак питання про вибір другої моделі залишається. GMRAE не може використовуватися в ситуаціях, коли хоча б одна з помилок однієї з моделей виявилася рівною нулю – в цьому випадку GMRAE стає рівним або нулю або нескінченності.

Виходячи з наведених формул, поділ на нульову помилку відбувається, якщо прогностичне значення отримане за допомогою моделі, дорівнює дійсному значенню.

Якщо обрана наївна модель, то поділ на нуль помилка виникає у випадку безперервної послідовності ідентичні значення часового ряду.

### 6. Масштабовані помилки

Середня абсолютна масштабована помилка (*Mean Absolute Scaled Error, MASE*):

$$MASE = \frac{T-1}{N} \frac{\sum_{i=1}^N |e_{T+i}|}{\sum_{j=2}^T |y_j - y_{j-1}|}, \quad (25)$$

де  $T$  – інтервал прогнозування.

Сума в чисельнику, відповідає тестовій вибірці, а в знаменнику – навчальній. Друга фактично являє собою середню абсолютну помилку прогнозу за методом Naive. Ця ж сума відповідає середньому абсолютному відхиленню ряду в перших різницях. Ця величина, по суті, показує, наскільки навчальна вибірка передбачувана і може дорівнювати нулю тільки в тому випадку, коли всі значення в навчальній вибірці рівні один одному. Це відповідає відсутності будь-яких змін в ряді даних, тобто ситуації, на практиці майже неможливі.

Слід зазначити, що модуль в знаменнику (25) потрібен для ситуацій, коли при прогнозуванні присутні як позитивні, так і негативні значення змінних, середня величина яких може бути близька до нуля. Якщо в такій ситуації брати просто середнє, виникає все та ж проблема масштабу.

Середня абсолютна масштабована помилка (*sMAE - scaled MAE, іноді позначається як MAE / mean*):

$$sMAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|e_i|}{y_i}. \quad (26)$$

Зауважимо, знаменник sMAE може дорівнювати нулю тільки в одному випадку – якщо всі фактичні значення в навчальній вибірці дорівнюють нулю. Критерій sMAE – практично ідеальний показник. У нього є лише один невеликий недолік – він не обмежений зверху. У загальному випадку значення sMAE буде показувати, який відсоток в середньому становлять помилки прогнозу. Ця величина буде незміщеною (в порівнянні з MAPE і SMAPE) і може легко складатися з іншими такими ж величинами.

Корінь квадратний середньої абсолютної масштабованої помилки (*Root Mean Square Scaled Error, RMSSE*):

$$RMSSE = \sqrt{\text{mean} \left( \frac{|e_i|}{\frac{1}{T-1} \sum_{j=2}^T |y_j - y_{j-1}|} \right)^2}. \quad (27)$$

Відносні критерії є симетричними та стійкими до викидів, однак мають наступні недоліки:

- якщо у прогностичному горизонті реальні значення є рівними, тоді відбувається поділ на нуль;
- можливе невелике зміщення оцінок [23].

### 7. Критерії, засновані на обчисленні відносних величин

Відносна середня абсолютна помилка (*Relative Mean Absolute Error, RelMAE*):

$$RelMAE = \frac{MAE}{MAE^*}, \quad (28)$$

де MAE і MAE\* – середні абсолютні помилки для аналізованої моделі прогнозування та базової

(еталонної) моделі відповідно, які обчислюють за формулою (4).

Відносний квадратний корінь середньої квадратичної помилки (*Relative Root Mean Squared Error, RRMSE*):

$$RRMSE = \frac{RMSE}{RMSE^*}. \quad (29)$$

Логарифм відносного середньоквадратичного відхилення (*Log mean squared error ratio, LMR*):

$$LMR = \log\left(\frac{RMSE}{RMSE^*}\right). \quad (30)$$

Ці критерії визначають кількість випадків, коли аналізована модель прогнозування перевершує базову, але не оцінюють значення різниці.

Недоліками цих критеріїв є можливість поділу на нульову помилку, якщо базова прогнозна помилка дорівнює нулю.

### 8. Інформаційні критерії

*Інформаційний критерій Акаїке (Akaike Information Criteria, AIC) [27]:*

$$AIC = \log MSE + \frac{2q}{N}, \quad (31)$$

де  $q$  – загальна кількість параметрів моделі;  $N$  – кількість спостережень.

Особливості AIC:

1) залежить від припущення нормальності даних;

2) цей критерій не є спроможним; тобто при збільшенні даних він схильний до так званої перепідгонці;

3) критерій AIC в загальному випадку є асимптотично ефективним.

*Бассівський інформаційний критерій (Bayesian Information Criteria, BIC) [28]:*

$$BIC = \log MSE + q \frac{\log N}{N}. \quad (32)$$

Особливостями даного критерію є наступне:

1) цей критерій вводить більш строгі штрафні характеристики, ніж AIC; тобто BIC «штрафує» моделі з великою кількістю параметрів більшою мірою, ніж це робить AIC;

2) критерій BIC є строго слухним критерієм: якщо дані в дійсності згенеровані моделлю, адекватною реальній, то BIC вибере справжню модель з одиначною ймовірністю з урахуванням того, що розмір вхідних даних буде прагнути до нескінченності;

3) BIC менш ефективний, ніж AIC.

*Інформаційний критерій Кульбака (Kullback Information Criterion, KIC) [29]*

$$KIC = N \ln \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2 \right] + 3S \ln N. \quad (33)$$

Цей критерій є менш використовуваним за інші.

*Інформаційний критерій Хеннана-Куїнна (HQ) [30]*

$$HQ = N \ln \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2 \right] + 2S \ln(\ln N). \quad (34)$$

Слід зазначити, що в окремому випадку нормального розподілу критерій AIC приймає вид

$$AIC(S) = RSS(S) + 2S, \quad (35)$$

званий критерієм Акаїке-Меллоуса.

*Зважений інформаційний критерій (Weighted Information Criteria, WIC)*

В роботі [31] було описано спроби поєднання статистичних та інформаційних критеріїв в одному зваженому критерії (Weighted Information Criterion, WIC)

$$WIC = 0,1(AIC + BIC) + 0,2(RMSE + MAPE) + 0,2((1 - DA) + MDA). \quad (36)$$

Слід зазначити, що коефіцієнти, які використовувалися в цьому критерії задавалися евристично не зрозуміло з яких міркувань.

*Адаптивний зважений інформаційний критерій (adaptive weighted information criterion, AWIC).*

В роботі [32] замість фіксованих використовувалися коефіцієнти, які обчислювалися шляхом вирішення деякої оптимізаційної задачі (при цьому критерій AIC та BIC бралися з вагою 0,1). Відповідний критерій було названо адаптивним (Adaptive WIC, AWIC)

$$AWIC = 0,1(AIC + BIC) + w_1 RMSE + w_2 MAPE + w_3(1 - DA) + w_4 MD. \quad (37)$$

Слід, однак, зазначити, що при цьому

1) не визначено критерій для оцінки вагових коефіцієнтів AIC и BIC;

2) немає жодних вказівок або рекомендацій щодо використання конкретних статистичних критеріїв, які б враховували поведінку часового ряду;

3) евристичні методи не були успішними в оцінці вагів для комбінованих методів;

4) цей критерій не враховує характеристик часових рядів.

### 9. U-статистика Тейла

Ця важлива міра розраховується за формулою [33]:

$$U = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (FPE_i - APE_i)^2}}{\sqrt{APE_i^2}}, \quad (38)$$

де  $FPE_i = \frac{\hat{y}_i - y_i}{y_i}$  – відносна зміна прогнозних даних;

$APE_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{y_i}$  – відносна зміна фактичних даних,

або

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{y}_i^2} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2}}. \quad (39)$$

Цей показник дозволяє здійснювати порівняння формальних методів прогнозування з найпростішими («наївними») методами.

Як видно з виразів (38), (39) шляхом піднесення відносних похибок до квадрата ліквідується ефект взаємної компенсації помилок і забезпечується ефект, коли значні помилки мають більшу вагу, ніж дрібні.

Як базис для порівняння використовуються два прості методи:

а) метод «випадкового блукання» (random walk) – це математична модель процесу випадкових змін – кроків у дискретні моменти часу. При цьому передбачається, що зміна на кожному кроці не залежить від попередніх змін і від часу;

б) метод урахування сезонності – цей метод розглядає можливість наявності в часових рядах сезонності. Оскільки високий відсоток флуктуацій даних у межах часового ряду зумовлений саме сезонністю, цей метод може мати кращі результати, ніж перший, при цьому залишаючись достатньо простим.

U-статистика Тейла коливається в межах діапазону  $[0; \infty]$  і є простою для інтерпретації:

– якщо  $U = 1$ , найпростіші базові методи є настільки точними, як і формальний метод прогнозування, що застосовується;

– якщо  $U < 1$ , формальний метод прогнозування, який застосовується, є кращим від базових методів. Наближення значення U-статистики до 0 свідчить про підвищення якості прогнозування порівняно з базовими методами;

– якщо  $U > 1$ , немає сенсу використовувати відповідний формальний метод прогнозування, оскільки базові методи дають кращі результати.

U-статистика Тейла може використовуватися при оцінці якості прогнозів, отриманих на основі різних методів та моделей.

є залежною від зміни масштабу та перетворення даних.

Може використовуватися при оцінці якості прогнозів, отриманих на основі різних методів та моделей.

Недоліки:

1) є залежною від зміни масштабу та перетворення даних;

2) її значення суттєво залежать від дисперсії ряду, що прогнозується (при прогнозуванні процесів з низькою дисперсією при явно невдалому

прогнозі U-статистика може мати мале значення, що обумовлюється низькою варіацією признаку).

Модифікована U-статистика Тейла [34]:

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{y}_i^2} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2}} \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{\hat{y}}^2}, \quad \text{якщо } \sigma_y^2 > \sigma_{\hat{y}}^2, \quad (40)$$

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{y}_i^2} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2}} \frac{\sigma_{\hat{y}}^2}{\sigma_y^2}, \quad \text{якщо } \sigma_y^2 < \sigma_{\hat{y}}^2,$$

де  $\sigma_y^2, \sigma_{\hat{y}}^2$  – дисперсії прогнозованого процесу та прогнозу відповідно, має за мету ліквідувати недолік традиційної статистики.

Ми розглянули деякі важливі міри (метрики) оцінки точності прогнозу. Кожна з цих мір має деякі унікальні властивості, відмінні від інших. У експериментах краще використовувати кілька критеріїв ефективності, що допоможе отримати знання про суму, величину та напрям загальної прогнозованої похибки. З цієї причини при прогнозуванні часових рядів аналітики зазвичай і використовують більше ніж одну міру для судження.

Крім того, існує ще достатньо велика кількість метрик, що представляють собою деякі модифікації розглянутих вище, наприклад, середня відносна абсолютна помилка (Mean Relative Absolute Error, MRAE), медіанна абсолютна процентна помилка (Median Absolute Percentage Error, MdAPE), медіанна відносна абсолютна помилка (Median Relative Absolute Error, MdRAE), процентна середньоквадратична помилка (Root Mean Square Percentage Error, RMSPE), відносна середня абсолютна помилка (Relative Mean Absolute Error, RelMAE), відносна середньоквадратична помилка (Relative Root Mean Square Error, RelRMSE), симетрична медіанна APE (Symmetric Median Mean Absolute Percentage Error, sMdAPE) та ін.]

## 10. Моделювання

Розглядалась задача прогнозування об'єму пасажиропотоку у аеропортах Німеччини. Для цього було використано данні з офіційного сайту Eurostat [35] – статистичної служба Європейського союзу, що займається збором статистичної інформації по країнам-членам ЄС і гармонізацією статистичних методів використовуваних даними країнами.

Слід зазначити, що часові ряди, які відображають пасажиропотік будь-якого транспорту є надзвичайно популярні при тестуванні різноманітних систем прогнозування, оскільки вони мають усі необхідні складові часового ряду – тренд, сезонність та циклічність. Отже, для прогнозування об'єму

пасажиропотоку у аеропортах Німеччини використовувався багатошаровий перцептрон (БП) з трьома входами та одним виходом (для прогнозування кількості пасажирів у наступному місяці використовувались данні за три минулих місяця). Для навчання нейронної мережі було сформовано навчаючу вибірку, у якій було відображено зміни пасажиропотоку Німеччини за останні 16 років. Результати моделювання з використанням критерію вибору структури MSE мережі наведено у рис. 2. В цьому випадку БП мав один прихований шар з 16 нейронами (архітектура 3-16-1).

В якості активаційної функції (АФ) нейронів вибиралася функція гіперболічного тангенсу

$$f_{th}(z) = \tanh(\alpha z) = \frac{e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}}{e^{\alpha z} + e^{-\alpha z}}, \quad (41)$$

де  $\alpha$  – деякий коефіцієнт, що впливає на вид функції активації.

Навчання (налаштування параметрів) перцептрону здійснювалося за допомогою алгоритму Левенберга-Марквардта.

На рисунку сполушною лінією показано реальний пасажиропотік, а пунктирною – спрогнозований за допомогою БП. Результати моделювання зі застосуванням усіх можливих помилок прогнозу зведено у табл.1.

Таблиця 1

Результати моделювання

Критерій	Архітектура мережі	Середня помилка прогнозу (у відсотках)
MAE	3-16-1	3,7794
MdAE	3-13-1	2,4964
MSE	3-16-1	1.3643
RMSE	3-14-1	3,3389
FRMQE	3-19-1	4,2612
MAPE	3-17-1	5,7794
MdAPE	3-18-1	2,8400
RMSPE	3-16-1	5,8643
RMdSPE	3-12-1	2,0651
SMAPE	3-15-1	4,5794
SMdAPE	3-12-1	4,9700
MRAE	3-18-1	2,1794
MdRAE	3-13-1	1,5964
GMRAE	3-15-1	1,5330
MASE	3-19-1	7,2145
RMSSE	3-20-1	6,6005
AIC	3-16-1	0,7693
BIC	3-16-1	0,7797
U-статистика Тейла	3-19-1	0,6572 (абсолютне значення)

**11. Обговорення результатів дослідження та рекомендації щодо вибору критеріїв прогнозування**

Як видно з результатів моделювання, використання різних критеріїв часто приводить до практично однакових результатів (однакової структури моделі). В даному випадку це можна пояснити зменшенням можливостей вибору структури моделей за рахунок використання в них однакового числа вхідних сигналів (триох).

Якщо ж розглядати задачу визначення оптимального числа вхідних сигналів, а потім вибору структури перцептронної моделі, то результати можуть бути зовсім іншими.

Слід зазначити, що на цей час існує досить багато досліджень, присвячених аналізу критеріїв якості прогнозування та розробці рекомендацій їх ефективного вибору. Розглянемо деякі з них.

Якщо оцінка прогнозу здійснюється для часових рядів з одним масштабом і були виконані

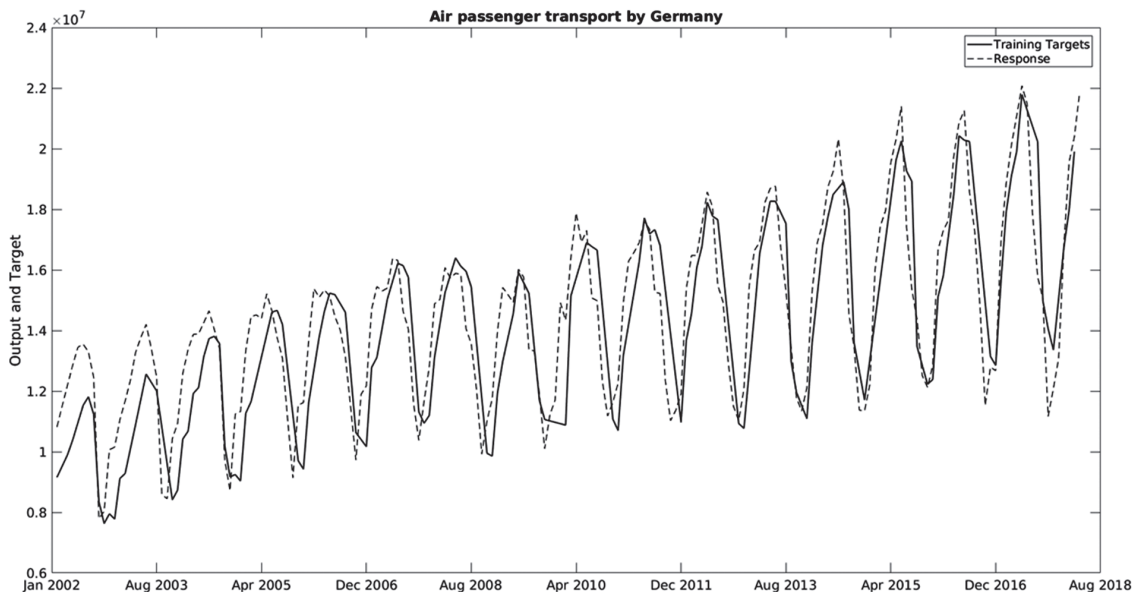


Рис. 2. Результати моделювання



процедури попередньої обробки даних (очищення даних, виявлення аномалій), розумно вибрати MAE, MdAE, RMSE. У разі використання різних масштабів ці міри критерії не застосовуються [23].

Щодо порівняння критеріїв MSE та MAE слід зауважити, що є тільки одна ситуація, в якій помилкам на основі MSE можна віддати перевагу щодо помилок на основі MAE – це прогнозування цілочисельного попиту. У цьому випадку число нулів у вибірці може бути настільки великим (може легко перевалити за 50 %), що всі помилки, засновані на модулях, будуть віддавати перевагу нульовому прогнозу. Це означає, наприклад, що при продажу нічого не продамо, тому нічого запасати – депресивний прогноз. Це пояснюється тим, що мінімум MAE відповідає медіанному значенню, в той час як мінімум MSE відповідає середньому.

Обидві ці оцінки MAE і MSE добре підходять, наприклад, для визначення точності прогнозу однієї і тієї ж послідовності при різних параметрах моделі або при використанні різних моделей, але ці оцінки виявляють помилок прогнозу менше, ніж при найвньому методі. Тобто, точність результатів прогнозу перевершує точність найвнього методу. І навпаки, якщо значення відносних оцінок більше одиниці, то точність результатів прогнозу в середньому гірше, ніж при найвньому методі прогнозування.

Ці оцінки так само придатні для визначення точності прогнозу на два або більше кроків вперед. Для цього потрібно лише замість помилки прогнозу на один крок при їх розрахунку використовувати значення помилок прогнозу на відповідну кількість кроків вперед.

Якщо дані набору не містять викидів, і часовий проміжок, на якому проводилися розрахунки, не є настільки великим, щоб не мати близьких за значенням даних, доцільним є використання масштабованих оцінок.

Якщо дані мають сезонні або циклічні закономірності, рекомендується використовувати нормовані помилки, коли можуть бути розраховані коефіцієнти нормування в межах інтервалу, рівного циклу або сезону.

При оцінці точності декількох прогнозів потрібен спосіб агрегування. Якщо прийняти середнє арифметичне, тоді слід використовувати середню абсолютну процентну похибку (MAPE).

Для різномасштабних випадків можна надати наступні рекомендації.

Незважаючи на те, що процентні помилки зазвичай використовуються при прогнозуванні в реальних задачах, внаслідок несиметрії застосовувати їх не рекомендують. Якщо діапазон значень лежить в позитивній напівплощині, і в даних немає викидів, доцільно використовувати симетричні критерії.

Якщо дані «забруднені», тобто містять викиди, доцільно застосовувати масштабні міри, такі як MASE, inRSE. У цьому випадку необхідно [23], щоб

- 1) горизонт прогнозування був достатнім;
- 2) не було однакових значень прогнозуємого ряду;
- 3) значення нормалізованого коефіцієнта не повинно дорівнювати нулю.

Після розрахунку результати аналізуються щодо поділу на нульові помилки і наявності протиріч.

У зв'язку з тим, що на різних наборах даних виходять різні результати оцінок помилок прогнозування, при відсутності результатів попереднього аналізу і необхідності узагальнення методів замість однієї метрики прогнозування розумно використовувати певний набір метрик помилок.

Слід зазначити, що іноді в літературі зустрічається порівняння моделей на основі RMSE. Таке порівняння в загальному випадку некоректно [15] і зазвичай призводить до вибору неправильної, тобто не самої точної, моделі. Це обумовлено тим, що RMSE сильно схильна до впливу викидів (через квадрат у формулі). Тому в результаті використання цього критерію перевага віддається менш точним моделям, які посередньо прогнозують дані, але при цьому не допускають жодної великої помилки. Очевидно, що будь-які коефіцієнти, засновані на RMSE, також будуть приводити до спотворених результатів.

У зв'язку з тим, що на різних наборах даних виходять різні результати оцінок помилок прогнозування, а кожен критерій має недоліки, які можуть призводити до неточного визначення якості прогнозування, неможливо виділити один універсальний критерій. Тому розумним є використання певного набору метрик помилок.

## Висновки

На цей час існує багато критеріїв оцінки ефективності вибору моделі для прогнозування часових рядів. Все ці критерії мають як переваги, так і недоліки, серед яких в першу чергу слід відзначити послідовність / непослідовність, чутливість до викидів, обчислювальний час тощо.

Аналіз традиційних критеріїв вибору моделі та помилок прогнозу показав, що вибір якісного критерію залежить від мети прогнозування та наявності інформації щодо статистичних властивостей даних та завад.

Якщо використання інформаційних критеріїв AIC, BIC є досить ефективним при визначенні структури нейромережевої моделі [36, 37], то запропоновані в останній час нові критерії оцінювання, які поєднують статистичні та інформаційні критерії в одному зваженому, мають ряд суттєвих

недоліків, зокрема не враховують характеристик часових рядів та містять суб'єктивний підхід до визначення вагових коефіцієнтів.

Розглянуті критерії вибору моделі аналізуються для прогнозування об'єму пасажиропотоку у аеропортах Німеччини. Отримані результати свідчать про те, що критерії вибору моделі на основі медіани прогнозів мають меншу мінливість, ніж інші, в той час як з критерії, що базуються на геометричному середньому, мають більшу мінливість.

При прогнозування економічних рядів з використання даних з високою волатильністю доцільним є застосування критеріїв, що базуються на медіані (MdAE, MdAPE, SMdAPE, MdRAE), і не використовувати інформаційні критерії, які вводять штрафи за складність моделі та неточність прогнозування (AIC, BIC).

#### Список літератури:

- [1] Bowerman B. Forecasting: methods and applications. 4<sup>th</sup> ed. / B. Bowerman, R. O'Connell, A. Koehler. – Belmont, CA.: Thomson Brooks, 2005. – 384 p.
- [2] Hyndman R.J. Forecasting: principles and practice. / R. J. Hyndman, G. Athanasopoulos. // 2<sup>nd</sup> ed, 2017. OTexts. <http://otexts.com/fpp>
- [3] Hanke J. E. Business forecasting (5th ed.) / J. E. Hanke, A.G. Reitsch. – NJ: Prentice-Hall, 1995. – 606 p.
- [4] Hyndman R. J. Another look at measures of forecast accuracy / R. J. Hyndman, A. B. Koehler. / Int. J. of Forecasting. – 2006. – 22 (4). – Pp. 679–688.
- [5] Gooijer J.G.D. 25 Years of Time Series Forecasting. / J.G.D. Gooijer, R.J.Hyndman / Int. Journal of Forecasting.- 2006.- 22(4).- Pp. 679-688.
- [6] Adhikari R. An Introductory Study on Time series Modeling and Forecasting // R. Adhikari, R.K. Agrawal. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013 – 67 p.
- [7] Allende H. Artificial neural networks in time series forecasting: a comparative analysis. / H. Allende, C. Moraga. R. Salas // Kybernetika. – 2002. – 6. – Pp.685–707.
- [8] Cao L.J. Support Vector Machine with Adaptive Parameters in Financial Time Series Forecasting // L.J. Cao, F.E.H. Tay // IEEE Transaction on Neural Networks-2003.- Vol. 14.- No. 6.- P: 1506-1518.
- [9] Tay F.E.H. Application of support vector machines in financial time series forecasting / F.E.H.Tay, L. Cao // Omega. -2001.- 29.- P. 309–317.
- [10] Mahmoud E. Accuracy in forecasting: A respect to division by zero errors and contradiction survey. / E. Mahmoud // J. of Forecasting. – 1984. – 3(2). – Pp. 139–159.
- [11] Flores B.E. A pragmatic view of accuracy measurement in forecasting / B.E. Flores // Omega. –1986. –Vol. 14. – Issue 2. – Pp. 93–98.
- [12] Armstrong, J.S. Error measures for generalizing about forecasting methods: empirical comparisons. / J.S. Armstrong, F. Collopy. // Int. J. Forecasting. – 1992. –8.–Pp. 69–80.
- [13] Makridakis S. Accuracy measures: theoretical and practical concerns. / S. Makridakis // Int. J Forecasting.- 1993.- 9.-Pp. 527- 529.
- [14] Goodwin, P. On the asymmetry of the symmetric MAPE. / P. Goodwin, R. Lawton // Int. J. of Forecasting.- 1999.- 15.- Pp. 405-408.
- [15] Koehler A.B. The asymmetry of the sAPE measure and other comments on the M3-competition. // A. B. Koehler.// Int. J. of Forecasting.- 2001.- 17.- Pp. 570-574.
- [16] Tofallis C. A better measure of relative prediction accuracy for model selection and model estimation / C. Tofallis // J. of the Operational Research Society.-2015.- 66.- Pp. 1352 – 1362.
- [17] Хайкин С. Нейронные сети: полный курс. / С. Хайкин – М.: Изд. дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.
- [18] Бодянский Е.В. Искусственные нейронные сети: архитектуры, обучение, применения. / Е.В. Бодянский, О.Г. Руденко. – Харків: ТЕЛЕТЕХ, 2004. – 369 с.
- [19] Myrtveit I. Validity and reliability of evaluation procedures in comparative studies of effort prediction models. // I. Myrtveit, E. Stensrud //Empirical Software Engineering.- 2012.- 17(1-2).- P.23-33.
- [20] Foss T. A simulation study of the model evaluation criterion MMRE. / T. Foss, E. Stensrud, B. Kitchenham, I. Myrtveit. // IEEE Transactions on Software Engineering.- 2003.-29.- Pp. 985 -995.
- [21] Green K. Percentage error: What denominator? / K. Green, L. Tashman// Int. Journal of Applied Forecasting.- 2009.-12.- Pp. 36-40.
- [22] Kolassa S. Percentage Errors Can Ruin Your Day (and Rolling the Dice Shows How) / S. Kolassa, R. Martin // Int. Journal of Applied Forecasting. - 2011.- issue 23.- Pp.21-27.
- [23] Shcherbakov M.V. A Survey of Forecast Error Measures / M.V. Shcherbakov, A.Brebels, N.L. Shcherbakova, A.P. Tyukov, T.A. Janovsky, V. Kamaev. // World Applied Sciences Journal 24 (Information Technologies in Modern Industry, Education & Society), –2013. – Pp.171–176.
- [24] Kim S. A new metric of absolute percentage error for intermittent demand forecasts / S. Kim., H. Kim // Int. J. of Forecasting. – 2016. –32.– Pp. 669–679.
- [25] Bal G. A comparison of different model selection criteria for forecasting Euro/USD exchange rates by feed forward neural network / C. Bal, S. Demir, C.H. Aladag // Int. J. of Computing, Communications & Instrumentation Engg. (IJCCIE).- 2016.- Vol. 3,- Issue 2.- P. 271-275]
- [26] Fildes R. The evaluation of extrapolative forecasting methods. / R. Fildes. // Int. J. of Forecasting. - 1992.- 8.- P.81–98.
- [27] Akaike H.A. A new look at statistical model identification / H.A. Akaike // IEEE Trans. on Automatic Control. - 1974. – 19. – P.716-723.
- [28] Schwarz G. Estimating the dimension of model / G. Schwarz // Ann. Statist. – 1978. – 6. – P.461-464.
- [29] Kullback S. Information theory and statistics. // S. Kullback /- New York, NY:Wiley, 1959.- 409 p.
- [30] Hannan E.J. The determination of the order of an autoregression / E.J. Hannan, B.G. Quinn / J. of the Royal Statistical Society. –1979. – 41. –P. 190–195.
- [31] Egrioglu E. A New Model Selection Strategy in Artificial Neural Network // E. Egrioglu, C.H. Aladag, S. Gunay / Applied Mathematics and Computation. –2008. – 195. –Pp. 591–597.
- [32] Aladag C.H. Improving weighted information criterion by using optimization / C.H. Aladag, E. Egrioglu, S. Gunay, M.A. Basaran / Journal of Computational and Applied Mathematics. –2010. – 233. –Pp. 2683–2687.
- [33] Тэйл Г. Экономическое прогнозирование и принятие решений. – М. Статистика, 1977.-282 с.
- [34] Пискунов Е.Ю. Модификация коэффициента Тэйла / Е.Ю. Пискунов // Математическое моделирование, системный анализ. –2012.- № 5. – С. 14-18. **35**.
- [35] [http://appsso.eurostat.ec.europa.eu/nui/show.do?dataset=avia\\_паос](http://appsso.eurostat.ec.europa.eu/nui/show.do?dataset=avia_паос)
- [36] Руденко О.Г. Нейросетевая аппроксимация нелинейных зашумленных функций на основе коэволюционного кооперативно- конкурентного подхода. / О.Г. Руденко, А.А. Бессонов / Проблемы управления и информатики –2018.- №3.- С. 5-14.
- [37] Руденко О.Г. Многокритериальная оптимизация эволюционирующих сетей прямого распространения / О.Г. Руденко, А.А. Бессонов / Проблемы управления и информатики. –2014.- № 6.- С. 29-41.

Поступила в редколлегию 14.11.2018