УДК 004.852 DOi 10.30837/ bi.2019.2(93).04

О.Г. Руденко[1], О.О. Безсонов[2], Н.М. Сердюк[3], К.О. Олійник[4], О.С. Романюк[4]

[1]Доктор технічних наук, завідувач комп'ютерних інтелектуальних технологій та систем, Харківський національний університет радіоелектроніки, oleh.rudenko@nure.ua, ORCID iD: 0000-0003-0859-2015

[2]Доктор технічних наук, професор кафедри комп'ютерних інтелектуальних технологій та систем, Харківський національний університет радіоелектроніки, oleksandr.bezsonov@nure.ua, ORCID iD: 0000-0001-6104-4275

[3] Кандидат технічних наук, доцент кафедри комп'ютерних інтелектуальних технологій та систем, Харківський національний університет радіоелектроніки, nataliya.serdyuk@nure.ua, ORCID iD: 0000-0002-0107-4365

[4]Аспірант кафедри інформатики, Харківський національний університет радіоелектроніки

РОБАСТНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ОБ'ЄКТІВ ЗА НАЯВНІСТЮ НЕГАУСІВСЬКИХ ЗАВАД

Розглянуто задачу ідентифікації параметрів лінійного об'єкта за наявністю негаусівських завад на основі мінімізації комбінованого функціоналу, який поєднує властивості МНК та МНМ. Визначено умови збіжності градієнтного алгоритму ідентифікації в середньому і середньоквадратичному. Отримано аналітичні оцінки неасимпотичних та асимптотичних значень помилки оцінювання параметрів і точності ідентифікації. Показано, що ці значення помилки оцінювання і точності ідентифікації залежать від вибору параметра змішування.

КОМБІНОВАНИЙ КРИТЕРІЙ, ГРАДІЄНТНИЙ АЛГОРИТМ, ПАРАМЕТР ЗВАЖУВАННЯ, РЕКУРЕНТНА ПРОЦЕДУРА, АСИМПТОТИЧНА ОЦІНКА, ТОЧНІСТЬ ІДЕНТИФІКАЦІЇ.

Рассмотрена задача идентификации параметров линейного объекта при наличии негауссовских помех на основе минимизации комбинированного функционала, который сочетает свойства МНК и МНМ. Определены условия сходимости градиентного алгоритма идентификации в среднем и среднеквадратичном. Получены аналитические оценки неасимпотичних и асимптотических значений ошибки оценивания параметров и точности идентификации. Показано, что эти значения ошибки оценивания и точности идентификации зависят от выбора параметра смешивания.

КОМБИНИРОВАННЫЙ КРИТЕРИЙ, ГРАДИЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ, ПАРАМЕТР ВЗВЕШИВАНИЯ, РЕКУРРЕНТНАЯ ПРОЦЕДУРА, АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА, ТОЧНОСТЬ ИДЕНТИФИКАЦИИ.

The problem of identifying the parameters of a linear object in the presence of non-Gaussian interference based on minimizing the combined functional that combines the properties of MLS and MSM is considered. The conditions for the convergence of the gradient identification algorithm in the mean and mean-square are determined. Analytical estimates of non-asymptotic and asymptotic values of the parameter estimation error and identification accuracy are obtained. It is shown that these values of estimation error and identification accuracy depend on the choice of the mixing parameter.

COMBINED CRITERION, GRADIENT ALGORITHM, WEIGHTS PARAMETER, RECURSIVE PROCEDURE, ASYMPTOTIC ESTIMATION, ACCURACY OF IDENTIFICATION.

Вступ

Задача ідентифікації не тільки становить інтерес сама по собі, але і є складовою частиною загальної задачі оптимізації. Багато задач управління, прогнозування, розпізнавання образів тощо пов'язані з побудовою моделі виду:

$$y(k)=\theta^{*T}x(k)+\xi(k), \qquad (1)$$

де $y(k)$ – спостережуваний вихідний сигнал; $x(k)=(x_1(k),x_2(k),..x_N(k))^T$ – вектор вхідних сигналів $N\times1$; $\theta^*=(\theta_1^*,\theta_2^*,..\theta_N^*)^T$ – вектор шуканих параметрів $N\times1$; $\xi(k)$ – завада, і зводяться до мінімізації деякого наперед обраного функціоналу якості (критерію ідентифікації).

Найбільш широко використовуваний на практиці квадратичний функціонал призводить до різних алгоритмах ідентифікації, що дозволяє отримати оцінки шуканого вектора θ^* при нормальних розподілах завади, тобто $\xi(k)\sim N(0,\sigma_\xi^2)$.

Більшість існуючих в даний час методів ідентифікації засновано на використанні жорстких і важко перевіряємих умов, пов'язаних з гіпотезою нормальності закону розподілу завади і таких, що обґрунтовуються посиланнями на центральну граничну теорему. Як відомо, нормальним законом щільності розподілу описуються завади, присутні в вимірах, що проводяться при абсолютній стабільності умов вимірювання, законом Лапласа, що має довші «хвости» - завади, що виникають при максимальній нестабільності умов. Відповідно алгоритми ідентифікації в разі гаусовських завад засновані на методі найменших квадратів (МНК), а в разі завад, розподілених за законом Лапласа, - на методі найменших модулів (МНМ). Обидва ці методу є оптимальними в своїх умовах і рішення, які отримуються за їх допомогою, можуть сильно відрізнятися. Крім того, у зв'язку з тим,що на практиці ці крайні випадки реалізуються надзвичайно рідко, ні закон Гауса, ні закон Лапласа, як правило, не виконуються.

Якщо інформація про приналежність завади ξ деякому певному класу розподілів є відомою, то шляхом мінімізації оптимального критерію, що представляє собою узятий з оберненим знаком логарифм функції розподілу завади, може бути отримана оцінка максимальної правдоподібності (М-оцінка). Якщо ж такої інформації немає, то для оцінювання шуканого вектора параметрів θ слід застосувати будь-який неквадратичний критерій, що забезпечує робастність одержуваної оцінки. Одним з таких критеріїв є модульний критерій, що приводить до знакового алгоритму.

Застосування цього критерію в задачі ідентифікації об'єкта при наявності імпульсних завад розглядалося в [1-4]. Так в [1] вивчалася ефективність афінного проекційного знакового алгоритму, в [2] застосовувався афінний проекційний знаковий алгоритм зі змінним коефіцієнтом посилення. Необхідно відзначити, що знакові алгоритми, забезпечуючи робастність одержуваних оцінок, мають низьку швидкість збіжності. Тому з метою прискорення процесу оцінювання в [3] пропонувався і досліджувався нормалізований знаковий алгоритм ідентифікації. В [4] вивчається простий в реалізації алгоритм, який використовує для корекції розміру кроку середньоквадратичну помилку і розрахункову потужність перешкоди. Аналогічно в [5] розглянуто алгоритм Качмажа зі змінним коефіцієнтом посилення, що залежить від квадрата взаємної кореляції між квадратом вихідної помилки і виходом адаптивної моделі, і показана його ефективність при вирішенні деяких завдань шумозаглушення.

Існує досить велика кількість функціоналів, які забезпечують отримання робастних М-оцінок. Найбільш поширеними є комбіновані функціонали, запропоновані Хьюбером [6,7] і Хемпелем [8,9]. Вони складаються з квадратичного функціоналу, що забезпечує оптимальність оцінок для гаусівського розподілу, і модульного, що дозволяє отримати більш робастну до розподілів з важкими «хвостами» (викидами) оцінку.

Однак ефективність одержуваних робастних оцінок істотно залежить від численних параметрів, що використовуються в критеріях і які обираються на основі досвіду дослідника.

Іншим підходом до отримання робастних оцінок, позбавлених зазначеного недоліку, є використання комбінованого критерію.

Комбінований критерій, заснований на поєднанні квадратичного і модульного критеріїв, що забезпечує робастність одержуваних оцінок, був запропонований в [10]. У роботах [11-13] даний критерій застосовувався для розв'язання задачі ідентифікації за наявністю імпульсних завад.

В роботі [14] був запропонований критерій найменшого четвертого ступеня, властивості якого вивчалися в роботах [15-19].

Комбінований критерій оцінювання для прискорення процесу ідентифікації, що використовує поєднання квадратичного критерію і критерію четвертого ступеня, запропонованого і дослідженого в [20], було розвинуто в роботі [21], метою якої було прискорення процесу ідентифікації. Властивості адаптивного алгоритма мінімізації такого комбінованого критерія вивчалися в роботах [22-23].

Як свідчить аналіз робіт, присвячених робастній ідентифікації об'єктів керування, застосування комбінованого критерія є досить ефективним та значно простішим за використання традиційних критеріїв. У зв'язку з цим представляється вельми актуальним розробка підходу до робастного оцінювання параметрів з використанням деякого комбінованого функціоналу, що дозволяє поєднувати переваги МНК і МНМ.

1. Дослідження збіжності робастної процедури ідентифікації

Для забезпечення робастних властивостей одержуваних оцінок досить ефективним є застосування комбінованого функціоналу навчання [31,32]

$$F[e(k)] = \frac{1}{4}\lambda e^4(k) + (1-\lambda)\left|e(k)\right|, \quad (2)$$

де $e(k) = y(k) - \hat{y}(k) + \xi(k) = y(k) - \hat{\theta}^T(k-1)x(k) + \xi(k)$, $\hat{y}(k)$ – вихідний сигнал моделі; $\hat{\theta}(k-1) = (\hat{\theta}_1(k-1), \hat{\theta}_2(k-1), ..\hat{\theta}_N(k-1))^T$ – вектор оцінюваних параметрів $N \times 1$; $\lambda \in [0,1]$ – параметр змішування.

При використанні комбінованого критерію (2) градієнтна процедура мінімізації має вигляд

$$\theta(k) = \theta(k-1) + \gamma(k)\left[\lambda e^3(k) + (1-\lambda)\operatorname{sign} e(k)\right]x(k), \quad (3)$$

де γ – деякий параметр, що впливає на швидкість збіжності алгоритму.

Дана процедура поєднує властивості МНК з властивостями МНМ, тому що при $\lambda = 1$ з (3) маємо алгоритм МНК, а при $\lambda = 0$ – алгоритм МНМ, і дозволяє боротися з негаусівськими завадами. Варіюючи параметр λ, можна змінювати властивості алгоритма.

Введемо в розгляд помилку оцінювання

$$\tilde{\theta}(k) = \theta(k) - \hat{\theta}(k), \quad (4)$$

що дозволяє записати вираз для $e(k)$ в такий спосіб:

$$e(k) = \tilde{\theta}^T(k-1)x(k) + \xi(k) = e_a(k) + \xi(k), \quad (5)$$

де $e_a(k) = \tilde{\theta}^T(k-1)x(k)$ - апріорна помилка ідентифікації.

У зв'язку з тим, що передбачається $\xi(k) \sim N(0, \sigma_\xi^2)$, маємо

$$M\left\{e^2(k))\right\} = \sigma_\xi^2 + \sigma_x^2 M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k)\right\|^2\right\}, \quad (6)$$

де $M\{\bullet\}$ – символ математичного очікування; $\|\bullet\|$ – евклидова норма.

Розглянемо питання збіжності процедури (3) за відсутності завад. З цією метою введемо функцію Ляпунова $\left\|\tilde{\theta}(k)\right\|^2$.

Запишемо алгоритм (3) щодо помилок ідентифікації $\tilde{\theta}(i)$

$$\tilde{\theta}(k)=\tilde{\theta}(k-1)-\gamma\left[\lambda e^3(k)+(1-\lambda)\operatorname{sign}e(k)\right]x(k)\,. \qquad (7)$$

Помноживши обидві частини (7) зліва на $\tilde{\theta}^T(k)$, з урахуванням того, що $e(k)=\tilde{\theta}^T(k-1)x(k)$, маємо

$$\left\|\tilde{\theta}(k)\right\|^2=\left\|\tilde{\theta}(k-1)\right\|^2-2\gamma\lambda e^4(k)-2\gamma(1-\lambda)e(k)\operatorname{sign}e(k)-$$
$$-\gamma^2\lambda^2e^6(k)\left\|x(k)\right\|^2+2\gamma^2\lambda(1-\lambda)e^3(k)\operatorname{sign}e(k)\left\|x(k)\right\|^2+$$
$$+\gamma^2(1-\lambda)^2\left\|x(k)\right\|^2. \qquad (8)$$

З (8) видно, що при $\gamma>0$, приріст функції Ляпунова

$$\Delta V(k)=\left\|\tilde{\theta}(k)\right\|^2-\left\|\tilde{\theta}(k-1)\right\|^2$$

буде негативним, якщо

$$\left(\lambda e^4(k)+2(1-\lambda)|e(k)|\right)>$$
$$>\gamma\left(\lambda e^3(k)+(1-\lambda)|e(k)|\right)^2\left\|x(k)\right\|^2. \qquad (9)$$

Таким чином, умова збіжності процедури (3) буде виконуватися, якщо параметр γ задовольняє нерівності

$$0<\gamma<\frac{2e(k)}{\left(\lambda e^3(k)+(1-\lambda)\operatorname{sign}e(k)\right)\left\|x(k)\right\|^2}. \qquad (10)$$

Оптимальне значення параметра γ визначаємо з рівняння, одержуваного шляхом диференціювання (8) по γ і прирівнювання похідної нулю. Таким чином,

$$\gamma^{\text{опт}}=\frac{e(k)}{\left(\lambda e^3(k)+(1-\lambda)\operatorname{sign}e(k)\right)\left\|x(k)\right\|^2}. \qquad (11)$$

Дослідимо статистичні властивості процедури навчання (3) при наявності перешкод виміру, тобто

$$y^*(k)=\theta^{*T}x(k)+\xi(k),\ \ \xi(k)\sim N\left(0,\sigma^2\right).$$

Припустимо, що завада не корельована з корисними сигналами. Записавши (3) щодо помилок навчання, маємо (7).

Розглянемо математичне сподівання $M\left\{\tilde{\theta}(k)\right\}$. Усереднюючи обидві частини (7), отримуємо

$$M\left\{\tilde{\theta}(k)\right\}=M\left\{\tilde{\theta}(k-1)-2\gamma\lambda\left(\tilde{\theta}^T(k-1)x(k)+\xi(k)\right)x(k)-\right.$$
$$\left.-\gamma(1-\lambda)\operatorname{sign}\left(\tilde{\theta}^T(k-1)x(k)\right)x(k)\right\}. \qquad (12)$$

Легко бачити, що

$$M\left\{\tilde{\theta}^T(k-1)x(k)x(k)\right\}=M\left\{x(k)x^T(k)\tilde{\theta}(k-1)\right\}=$$
$$=M\left\{x(k)x^T(k)\right\}M\left\{\tilde{\theta}(k-1)\right\}=R_{xx}M\left\{\tilde{\theta}(k-1)\right\}, \qquad (13)$$

де R_{xx} – кореляційна матриця вхідного сигналу.

Детально розглянемо вираз

$$M\left\{x(k)\operatorname{sign}\left(\tilde{\theta}^T(k-1)x(k)\right)x(k)\right\}.$$

У випадку, якщо сигнал $x(k)\sim N\left(0,\sigma_x^2\right)$, маємо

$$M\left\{x(k)\operatorname{sign}\left(\tilde{\theta}^T(k-1)x(k)\right)\right\}=$$
$$M\left\{M\left\{x(k)\operatorname{sign}\left(\tilde{\theta}^T(k-1)x(k)\right)\right\}\right\}=$$
$$=M\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma_e}M\left\{x(k)\left(\theta^T(k-1)x(k)\right)\right\}\right\}=$$
$$=M\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi\sigma_e^2}}M\left\{x(k)x^T(k)\theta(k-1)\right\}\right\}= \qquad (14)$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi\sigma_e^2}}M\left\{x(k)x^T(k)\theta(k-1)\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi\sigma_e^2}}R_{xx}M\left\{\theta(k-1)\right\},$$

де σ_e – середньоквадратичне значення помилки $e(k)$.

Вираз (9) отримано з використанням теореми Прайса [24], згідно з якою для двох випадкових гаусовських величин x та y з нульовими математичними сподіваннями справедливо

$$M\left\{x\operatorname{sign}y\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma_y}M\left\{xy\right\},$$

де σ_y – середньоквадратичне значення y.

З урахуванням властивостей завади

$$M\left\{\xi(k)x(k)\right\}=0$$

і виразів (8), (9) маємо

$$M\left\{\tilde{\theta}(k)\right\}=\left\{I-3\gamma\lambda\sigma_e^2R_{xx}-\gamma(1-\lambda)\beta R_{xx}\right\}M\left\{\tilde{\theta}(k-1)\right\}, \qquad (15)$$

звідки випливає, що процедура (3) буде збігатися в середньому, якщо параметр γ задовольняє нерівності

$$0<\gamma<\frac{2}{\left(3\lambda\sigma_e^2+(1-\lambda)\beta\right)trR_{xx}}. \qquad (16)$$

Тут $\beta=\sqrt{\dfrac{2}{\pi\sigma_e^2}}$; trR_{xx} – слід матриці R_{xx}.

З огляду на властивості вхідних сигналів, можемо записати умову (16) наступним чином:

$$0<\gamma<\frac{2}{\left(3\sigma_e^2\lambda+(1-\lambda)\beta\right)N\sigma_x^2}. \qquad (17)$$

Для дослідження збіжності алгоритму в середньоквадратичному розглянемо функцію Ляпунова $M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k)\right\|^2\right\}$.

Помноживши обидві частини (7) зліва на $\tilde{\theta}^T(k)$, отримаємо

$$\left\|\tilde{\theta}(k)\right\|^2=\left\|\tilde{\theta}(k-1)\right\|^2-2\gamma\lambda e^3(k)\left(\tilde{\theta}^T(k-1)x(k)\right)$$
$$-2\gamma(1-\lambda)\tilde{\theta}^T(k-1)x(k)\operatorname{sign}e(k)+\gamma^2\lambda^2e^6(k)\left\|x(k)\right\|^2+$$
$$+2\gamma^2\lambda(1-\lambda)e^3(k)\operatorname{sign}e(k)\left\|x(k)\right\|^2+\gamma^2(1-\lambda)^2\left\|x(k)\right\|^2.$$

В даний вираз входять такі величини $e^3(k)$ та $e^6(k)$, які відповідно дорівнюють

$$e^3(k)=(e_a(k)+\xi(k))(e_a^2(k)+2e_a(k)\xi(k)+\xi^2(k));$$

$$e^6(k)=(e_a(k)+\xi(k))^6=e_a^6(k)+5e_a^5(k)\xi(k)+6e_a(k)\xi^5(k)+$$
$$+e_a^4(k)\xi^2(k)+20e_a^3(k)\xi^3(k)+15e_a^2(k)\xi^4(k)+\xi^6(k). \qquad (18)$$

Взявши від обох частин (8) математичне сподівання, маємо

$$M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k)\right\|^2\right\} == M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k-1)\right\|^2\right\} - 2\gamma\lambda M\left\{e^3(k)e_a(k)\right\} -$$
$$-2\gamma(1-\lambda)M\left\{e_a(k)\operatorname{sign}e(k)\right\} + \gamma^2\lambda^2 M\left\{e^6(k)\left\|x(k)\right\|^2\right\} +$$
$$+2\gamma^2\lambda(1-\lambda)M\left\{e^3(k)\operatorname{sign}e(k)\left\|x(k)\right\|^2\right\} + \qquad (19)$$
$$+\gamma^2(1-\lambda)^2 M\left\{\left\|x(k)\right\|^2\right\}.$$

Розглянемо кожний доданок в правій частині (19) з урахуванням (18) і статистичних властивостей сигналів і завад. У нашому випадку

$$M\left\{e^3(k)e_a(k)\right\} = M\left\{\left(\tilde{\theta}^T(k-1)x(k)\right)^4\right\} \approx$$
$$\approx 3\sigma_x^4\left(M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k-1)\right\|^2\right\}\right)^2;$$
$$M\left\{\left(\tilde{\theta}^T(k-1)x(k)\right)^2\right\}M\left\{\xi^4(k)\right\} \approx$$
$$\approx \sigma_x^2 M\left\{\xi^4(k)\right\}M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k-1)\right\|^2\right\};$$
$$M\left\{\left(\tilde{\theta}^T(k-1)x(k)\right)^6\left\|x(k)\right\|^2\right\} \approx$$
$$\approx (15N+90)\sigma_x^8\left(M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k-1)\right\|^2\right\}\right)^3;$$
$$M\left\{\left(\tilde{\theta}^T(k-1)x(k)\right)^4\left\|x(k)\right\|^2\right\} =$$
$$= (3N+2)\sigma_x^4 M\left\{\xi^4(k)\right\}M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k-1)\right\|^2\right\};$$
$$M\left\{\left(\tilde{\theta}^T(k-1)x(k)\right)^2\left\|x(k)\right\|^2\right\} =$$
$$= (N+2)\sigma_x^4 M\left\{\xi^4(k)\right\}M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k-1)\right\|^2\right\};$$
$$M\left\{\left(\tilde{\theta}^T(k-1)x(k)\right)^2\right\} = \sigma_x^2 M\left\{\left\|\theta(k-1)\right\|^2\right\};$$
$$M\left\{\left\|x(k)\right\|^2\xi^6\right\} = M\left\{\left\|x(k)\right\|^2\right\}M\left\{\xi^6\right\} = N\sigma_x^2 M\left\{\xi^6\right\};$$
$$M\left\{\left\|x(k)\right\|^2\right\} = N\sigma_x^2.$$

Вираз $M\left\{\tilde{\theta}^T(k-1)x(k)\operatorname{sign}\left(\theta^T(k-1)x(k)\right)\right\}$ для проаналізуємо за аналогією з (9)

$$M\left\{\tilde{\theta}^T(k-1)x(k)\operatorname{sign}\left(\tilde{\theta}^T(k-1)x(k)\right)\right\} =$$
$$= M\left\{M\left\{\tilde{\theta}^T(k-1)x(k)\operatorname{sign}\left(\tilde{\theta}^T(k-1)x(k)\right)\mid\tilde{\theta}(k-1)\right\}\right\} =$$
$$= M\left\{\tilde{\theta}^T(k-1)\sqrt{\frac{2}{\pi\sigma_e}}M\left\{x(k)x^T(k)\tilde{\theta}(k-1)\mid\tilde{\theta}(k-1)\right\}\right\} \approx \qquad (20)$$
$$\approx M\left\{\tilde{\theta}^T(k-1)\beta\tilde{\theta}(k-1)\right\}R_{xx} =$$
$$= \beta trR_{xx}M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k-1)\right\|^2\right\} = \beta\sigma_x^2 M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k-1)\right\|^2\right\}.$$

Аналогічно отримуємо

$$M\left\{\tilde{\theta}^T(k-1)x(k)\operatorname{sign}\left(\tilde{\theta}^T(k-1)x(k)\right)\left\|x(k)\right\|^2\right\} = \qquad (21)$$
$$= 3\beta\sigma_x^4 M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k-1)\right\|^2\right\}.$$

При обчисленні $M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k)\right\|^2\right\}$ враховано статистичні властивості завади, тобто

$$M\left(\xi(k)\right) = M\left(\xi^3(k)\right) = M\left(\xi^5(k)\right) = 0\,.$$

Підстановка отриманих виразів в (19) і нескладні перетворення дають

$$M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k)\right\|^2\right\} =$$
$$\left(1 - 6\gamma\lambda\sigma_x^2\sigma_\xi^2 + 15(N+2)\gamma^2\lambda^2\sigma_x^4 M\left\{\xi^4(k)\right\} - 2\gamma(1-\lambda)\beta\sigma_x^2\right)\times$$
$$\times M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k)\right\|^2\right\} +$$
$$+\left(15(3N+12)\gamma^2\lambda^2\sigma_x^6\sigma_\xi^2 + 6\gamma^2\lambda(1-\lambda)\sigma_x^4\beta - 6\gamma\lambda\sigma_x^4\right)\times$$
$$\times\left(M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k-1)\right\|^2\right\}\right)^2 + \qquad (22)$$
$$+(15N+90)\gamma^2\lambda^2\sigma_x^8\left(M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k-1)\right\|^2\right\}\right)^3 +$$
$$+\gamma^2\sigma_x^2 N\left(\lambda^2 M\left\{\xi^6(k)\right\} + (1-\lambda)^2\right).$$

Якщо алгоритм збігається, величина $M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k)\right\|^2\right\}$ буде малою. Тому для аналізу сталого стану вираз (22) можна спростити, нехтуючи величинами

$$\left(M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k-1)\right\|^2\right\}\right)^2 \text{ та } \left(M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k-1)\right\|^2\right\}\right)^3$$

і обмежуючись розглядом величини

$$M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k)\right\|^2\right\} = (1 - 6\gamma\lambda\sigma_x^2\sigma_\xi^2 + 15(N+2)\gamma^2\lambda^2\sigma_x^4 M\left\{\xi^4(k)\right\} -$$
$$-2\gamma(1-\lambda)\beta\sigma_x^2)M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k)\right\|^2\right\}. \qquad (23)$$

З (23) випливає, що процедура (3) буде збігатися в середньоквадратичному (приріст функції Ляпунова буде негативним) за виконання умови

$$M\left\{\left\|\tilde{\theta}(\infty)\right\|^2\right\} = \frac{\gamma N\left[\lambda^2 M\left\{\xi^6\right\} + (1-\lambda)^2\right]}{15\gamma(N+2)M\left\{\xi^4\right\} - 6\lambda\sigma_\xi^2 - 2(1-\lambda)\beta}, \qquad (24)$$

тобто якщо параметр γ задовольняє нерівності

$$0 < \gamma < \frac{2\left(3\lambda\sigma_\xi^2 + (1-\lambda)\beta\right)}{15(N+2)\lambda^2\sigma_x^2 M\left\{\xi^4(k)\right\}}.$$

Оптимальне значення цього параметра, що забезпечує максимальну швидкість збіжності алгоритму, яке отримується шляхом вирішення рівняння

$$\frac{\partial M\left\{\left\|\tilde{\theta}(k)\right\|^2\right\}}{\partial\gamma} = 0,$$

матиме такий вигляд:

$$\gamma^{opt} = \frac{3\lambda\sigma_\xi^2 + (1-\lambda)\beta}{15(N+2)\lambda^2 M\left\{\xi^4(k)\right\}}.$$

Зі співвідношення (23) можна отримати вираз для асимптотичної помилки оцінювання

$$M\left\{\left\|\tilde{\theta}(\infty)\right\|^2\right\} = \frac{\gamma N\left[\lambda^2 M\left\{\xi^6\right\} + (1-\lambda)^2\right]}{15\gamma(N+2)M\left\{\xi^4\right\} - 6\lambda\sigma_\xi^2 - 2(1-\lambda)\beta}, \qquad (25)$$

тобто для забезпечення $\lim\limits_{k\to\infty} M\left\{\left\|\tilde{\theta}(\infty)\right\|^2\right\}=0$ параметр γ повинен обиратися змінним і з ростом k прагнути до нуля, тобто задовольняти умовам Дворецького [25].

Підстановка (24) в (6) дає вираз для асимптотичної помилки ідентифікації

$$M\left\{e^2(\infty)\right\}=\sigma_\xi^2+\frac{\sigma_x^2\gamma N\left[\lambda^2 M\left\{\xi^6\right\}+(1-\lambda)^2\right]}{15\gamma(N+2)M\left\{\xi^4\right\}-6\lambda\sigma_\xi^2-2(1-\lambda)\beta}.$$

2. Моделювання

Для експериментального дослідження можливостей алгоритму (7) проводилася ідентифікація лінійного об'єкта, описуваного рівнянням (1) з

$$\theta^*=(1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256)^T .$$

При тестуванні робастності алгоритмів в вихідний сигнал об'єкта додавався незалежний шум с розподілом Релея ($\gamma=1.0$). Гістограма такої завади показана на рис. 1. Результати моделювання представлені на рис. 2-3. На рис. 2 показано графік налаштування параметрів моделі, а на рис. 3 – помилки ідентифікації.

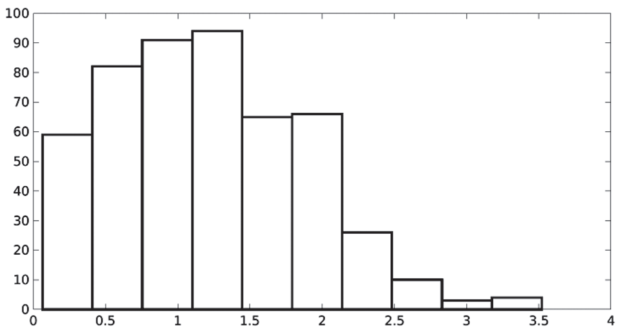

Рис. 1

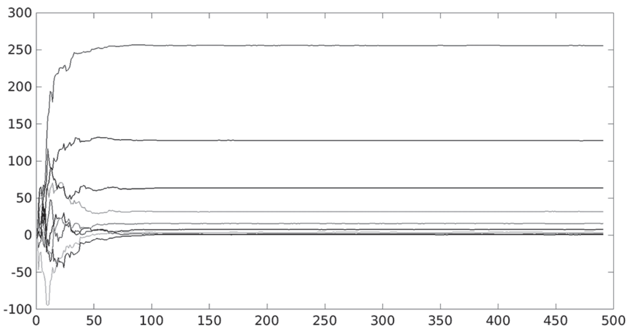

Рис. 2

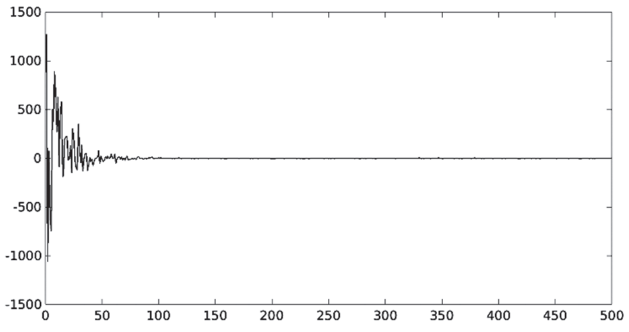

Рис. 3

Висновки

В роботі був розглянутий новий метод ідентифікації лінійних об'єктів за умов негаусівських завад із застосуванням комбінованого функціоналу, який поєднує властивості МНК та МНМ. Визначено умови збіжності градієнтного алгоритму ідентифікації в середньому і середньоквадратичному. Отримано аналітичні оцінки неасимптотичних та асимптотичних значень помилки оцінювання параметрів і точності ідентифікації. Показано, що ці значення помилки оцінювання і точності ідентифікації залежать від вибору параметра змішування. Отримані оцінки є досить загальними і залежать від статистичних характеристик корисних сигналів і завад. Тому для їх практичного застосування слід скористатися оцінками цих параметрів.

Слід зазначити, що отримані в даній роботі оцінки дозволяють досліднику при вирішенні практичних завдань попередньо оцінити можливості досліджуваного алгоритму і ефективність його застосування.

Список літератури:

[1] *Shao T.* An affine projection sign algorithm robust against impulsive interferences / T. Shao, Y.R. Zheng, J. Benesty // IEEE Signal Process. Lett. -2010- 17(4).-P. 327–330

[2] *Shin J.* Variable step-size affine projection sign algorithm / J. Shin, J. Yoo, P. Park // Electronics Lett..- 2012.- 48(9). - P. 483–485

[3] *Lu L.* A novel normalized sign algorithm for system identification under impulsive noise interference / L. Lu, H. Zhao, K. Li, B. Chen //Int. J. of Electronics and Communications.- 2015.- 69(11).-P. 1590–1598.

[4] *Huang H.J.* A new variable step-size NLMS algorithm and its performance analysis/ H. Huang, J. Lee // IEEE Trans. Signal Process. -2012.-60(4).-P. 2055–2060.

[5] *Casco-Sánchez F.M.* A New Variable Step-Size NLMS Algorithm and its Performance Evaluation in Echo Cancelling Applications / F.M. Casco-Sánchez, R.C. Medina-Ramírez, M. López-Guerrero //J. of Applied Research and Technology.- 2011.-.9.-3.-P. 302-313

[6] *Huber P.* Robust methods of estimation of regression coefficients / P. Huber // Statistics.- 1977.- 8.-1.-P. 41–53.

[7] *Хьюбер П.* Робастность в статистике / П. Хьюбер – М.: Мир, 1984. – 304 с.

[8] *Hampel F.R.* The influence curve and its role in robust estimation / F.R. Hampel // J. Amer. Statist. Assoc. – 1974. – June. – **69**. – P. 383-393.

[9] Hampel F.R. Robust Statistics. The Approach Based on Influence Function ./ F.R. Hampel, E.M. Ronchetti, P.J. Rousseeuw, W.A. Stahel.– N.Y.: John Wiley and Sons, 1986. – 526 p.

[10] *Chambers J.* A Robust Mixed-Norm Adaptive Filter / J. Chambers, A. Avlonitis // IEEE Signal Processing Letters. – 1997. – 4. – 2. –P. 46–48.

[11] *Papoulis E.V.* A Normalized Robust Mixed-Norm Adaptive Algorithm for System Identification / E.V. Papoulis, T. Stathaki // IEEE Signal Processing Letters.- 2004. – 11. – 1. –P. 56–59

[12] *Arenas-Garcia J.* Adaptive combination of normalised filters for robust system identification. / J. Arenas-Garcia, A.R. Figueiras-Vidal // Electronics Lett. –2005. – 41(15). – P. 874–875.

[13] *Rudenko O.* Robust identification of non-stationary objects with nongaussian interference / O. Rudenko, O. Bezsonov, V. Lebediev.N. Serdiuk // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2019. – № 5/4 (101). – P.44–52.

[14] *Walach, E.* The least mean fourth (LMF) adaptive algorithm and its family / E. Walach, D. Widrow // IEEE Trans. –1984. – IT–30. –P. 275–283

[15] *Bershad N.* Mean-square stability of the normalized least mean fourth algorithm for white Gaussian Inputs / N. Bershad, J.C.M. Bermudez// Digit. Signal Process. – 2011. –21(6). – P.694–700.

[16] *Eweda E.* New insights into the normalization of the least mean fourth algorithm / E. Eweda, A. Zerguine // Signal Image Video Process. – 2013. –7(2). –P.255–262..

[17] *Eweda E.* Global stabilization of the least mean fourth algorithm / E. Eweda // IEEE Trans. Signal Process. – 2012. – 60(3). –P. 1473–1477.

[18] *Eweda E.* Stochastic analysis of a stable normalized least mean fourth algorithm for adaptive noise canceling with a white Gaussian reference / E. Eweda, N. Bershad // IEEE Trans. Signal Process. – 2012. – 60(12).P. 6235–6244.

[19] *Hübscher P.I.* A mean-square stability analysis of the least mean fourth adaptive algorithm /P.I. Hübscher, J.C.M.Bermudez, V.H. Nascimento // IEEE Trans. Signal Process.- 2007.-55(8).-P. 4018–4028

[20] *Chambers J.* Least mean mixed-norm adaptive filtering / J. Chambers, O. Tanrikulu, A.G. Constantinides // Electronics letters. – 1994. – 30. – 19. – P. 1574–1575.

[21] *Rakesh P.* Modified least-mean mixed-norm algorithms for adaptive spars system identification under impulsive noise environment / P. Rakesh, T.K. Kumar, F. Albu //42 Int. Conf. on Telecommunications and Signal Processing (TSP), Budapesht, July, 2019. –1.– P. 557–561

[22] *Zerguine A.* A variable-parameter normalized mixed-norm (VPNMN) adaptive algorithm / A. Zerguine // EURASIP Journal on Advances in Signal Processing 2012, 2012:55.- 13 p. http://asp.eurasipjournals.com/content/2012/1/55

[23] *Zerguine A.* A time-varying normalized mixed-norm LMS-LMF algorithm / A. Zerguine // 11 th European Signal Proc. Conf., Toulouse, France CNUM, 3-6 Sep 2002. – 4 p. https://www.eurasip.org/Proceedings/Eusipco/2002/articles/paper394.pdf

[24] *Price R.* A useful theorem for nonlinear devices having Gaussian inputs / R. Price // IREN Trans. Inform Theory. –1958. –4. – P. 69–72. doi: 10.1109/TIT.1958.1057444

[25] Вазан М. Стохастическая аппроксимация / М. Вазан. – М.: Мир, 1972. – 295 с.

Надійшла до редколегії 20.09.2019